Sistemas Dinámicos
Solución de Sistemas Dinámicos

M.Sc. I.M. Manuel F. Mejía De Alba

Maestría en Modelado y Simulación
Universidad Central y Universidad Jorge Tadeo Lozano

Agosto de 2014

Contenido

- Preliminares
- Transformada de Laplace
- Teoremas importantes de la Transformada de Laplace
- Fracciones Parciales
- Solución de Ecuaciones diferenciales utilizando Transformada de Laplace
- Simulink
- Ejemplos de modelado en Simulink
- Problemas numéricos

Linealidad

La *linealidad* es una propiedad de algunas funciones. Para poseer esta propiedad es necesario satisfacer dos condiciones. Sea la función $f(x) : U \to V$, para $x_1, x_2 \in U$ y a un escalar, las dos condiciones son:

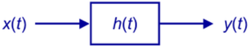
1. **superposición:** $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
2. **proporcionalidad:** $f(ax_1) = af(x_1)$

Ecuaciones diferenciales lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma

$$a_n(t)\frac{dy^n}{dt^n} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = b_m(t)\frac{du^m}{dt^m} + \cdots + b_1(t)\frac{du}{dt} + b_0(t)u(t)$$

Sistema lineal



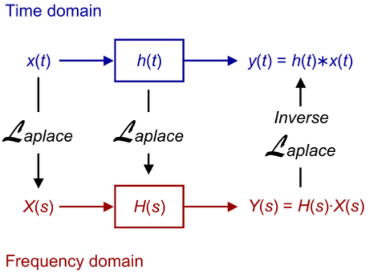
Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una transformación lineal definida mediante la integral:

$$F(s) \doteq \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Esta integral impropia converge dependiendo de la función $f(t)$. Una manera de garantizar lo anterior es que la función sea de orden exponencial, es decir que esté acotada por e^t.

Gráficamente se puede definir el proceso de solucionar ecuaciones diferenciales de la siguiente forma:



Transformada de Laplace

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n, \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p, p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\frac{s\left(s^2-a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\frac{s\left(s^2+3a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at}, \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t), \quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			

UNIVERSIDAD CENTRAL

Conceptos importantes

Teoremas importantes

Teorema de valor inicial:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Teorema de valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Convolución:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

Fracciones Parciales

Factor in denominator	Term in partial fraction decomposition
$ax+b$	$\dfrac{A}{ax+b}$
$(ax+b)^k$	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$
ax^2+bx+c	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2+bx+c)^k$	$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\dfrac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$

Función de Transferencia

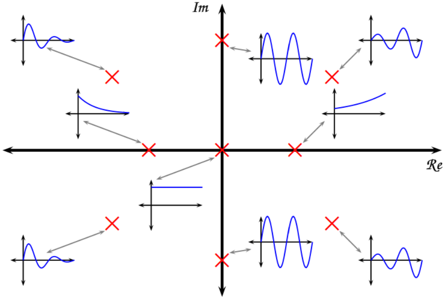
- Respuesta de entrada cero: Depende de las condiciones iniciales del sistema y no de la entrada $U(s)$.
- Respuesta de estado cero: Depende de la entrada $U(s)$ y no de las condiciones iniciales. Si las condiciones iniciales son cero ésta es la respuesta del sistema.

Tiene mucha relación con la función de transferencia, que es la relación en variable entre la transformada de Laplace de la salida y la entrada del sistema. Esta sirve para representar y analizar sistemas de forma compacta.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left.\frac{\text{Transformada de la salida}}{\text{Transformada de la entrada}}\right\} \text{con condiciones iniciales nulas}$$

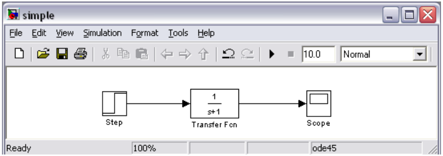
Definiendo y graficando los polos de la función de transferencia como las raíces del denominador, se pueden plantear las siguientes premisas de estabilidad:

- Un sistema es **estable** si todos los polos de su función de transferencia se encuentran en el semiplano izquierdo.
- Si al menos un polo se encuentra en el semiplano derecho o hay polos repetidos sobre el eje imaginario, el sistema es **inestable**
- Un sistema es **marginalmente estable** cuando todos sus polos están en el semiplano izquierdo, excepto por uno en el origen o por complejos conjugados con parte real cero.



Diagramas de Bloques y Simulink

Un sistema complejo puede representarse mediante subsistemas más sencillos interrelacionados. Estas relaciones pueden representarse mediante un diagrama de bloques.



Simulink es una aplicación de matlab que permite construir y simular modelos de sistemas físicos mediante diagramas de bloques. El comportamiento de dichos sistemas se define mediante funciones de transferencia, operaciones matemáticas, elementos de Matlab y señales predefinidas de todo tipo. Dispone de una serie de utilidades que facilitan la visualización, análisis y guardado de los resultados de simulación.

Se puede acceder a la aplicación tecleando desde Matlab `simulink`.

Más información en $http://personales.unican.es/corcuerp/Matlab\_Simulink/$

Modelado en Simulink

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\sin(\theta) = \Gamma$$

- ¿Cómo sería la representación del sistema utilizando función de transferencia?
- ¿Cómo se incluiría un resorte de torsión en la base del péndulo?
- Representación en **Variables de estado**

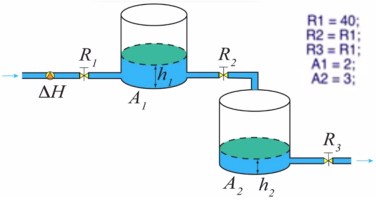
$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]u(t)$$
$$\dot{y}(t) = [C]x(t) + [D]u(t)$$

Para el problema anterior, utilizando $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$, quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{b}{mL^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix} \Gamma$$
$$\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]\Gamma$$

El anterior sistema puede ser introducido directamente en simulink usando el bloque de State-Space de las herramientas de continuo.

Modelado en Simulink



Xiaopeng Bi, *Fluid Level system Simulink Simulation*

- Realizar balances para determinar las EDOS
- En forma de variables de estado, con $x_1 = h_1$ y $x_2 = h_2$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{R_1 A_1} + \frac{1}{R_2 A_2}) & 0 \\ -\frac{1}{R_2 A_2} & -\frac{1}{R_3 A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta H$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta H$$

- ¿Cómo cambiaría el modelo si ahora el segundo tanque tiene una forma cónica?

Problemas numéricos

En forma general se tiene

$$[\dot{x}] = [f([x], t)]$$

$$[x(0)] = [x_0],\ t > 0$$

Este sistema puede ser resuelto usando:

- Euler
- Diferencias finitas
- Adams–Bashforth
- Adams–Moulton
- Runge–Kutta

Implementaciones en Matlab

Función	Tipo de problema que resuelve	Método	Ventajas/ desventajas
`ode45`	EDOs no rígidas.	Runge-Kutta Método de un paso.	Responde bien en la mayoría de los problemas.
`ode23`	EDOs no rígidas. Se puede aplicar a ecuaciones levemente rígidas.	Runge-Kutta Método de un paso.	Más eficiente que `ode45`. Para tolerancias primitivas.
`ode113`	EDOs no rígidas.	A-B-M Método multipasos.	Más eficiente que `ode45`, cuando la EDO es muy difícil de evaluar.
`ode15s`	EDOs rígidas.	FDNs Método multipasos.	Responde bien en la mayoría de los problemas.
`ode23s`	EDOs rígidas.	Rosenbrock Método de un paso.	Más eficiente que `ode15s`. Para tolerancias primitivas.
`ode23t`	EDOs moderadamente rígidas.	FDNs Regla del trapecio.	Sin amortiguamiento numérico.
`ode23tb`	EDOs rígidas.	Runge-Kutta Regla del trapecio.	Más eficiente que `ode23t`, cuando la ODE es muy difícil de evaluar. Para tolerancias primitivas.

Stiffness - Rigidez

Problema 1

$$\begin{bmatrix} {}^1y' \\ {}^2y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1y \\ {}^2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sin x \\ 2(\cos x - \sin x) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} {}^1y(0) \\ {}^2y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Problema 2

$$\begin{bmatrix} {}^1y' \\ {}^2y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1y \\ {}^2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sin x \\ 999(\cos x - \sin x) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} {}^1y(0) \\ {}^2y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La solución analítica en ambos casos es:

$$\begin{bmatrix} {}^1y(x) \\ {}^2y(x) \end{bmatrix} = 2\exp(-x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$$

- ¿Cómo es el comportamiento de los métodos al solucionar estos 2 problemas?
- Pequeños cambios en x y y causan grandes cambios en $\dot{y}$
- Para sistemas lineales está relacionado con $\frac{max(\lambda_i)}{min(\lambda_i)}$