Modelado a partir de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDDPs)

Proceso de modelado: cuerda vibrante

UNIVERSIDAD CENTRAL

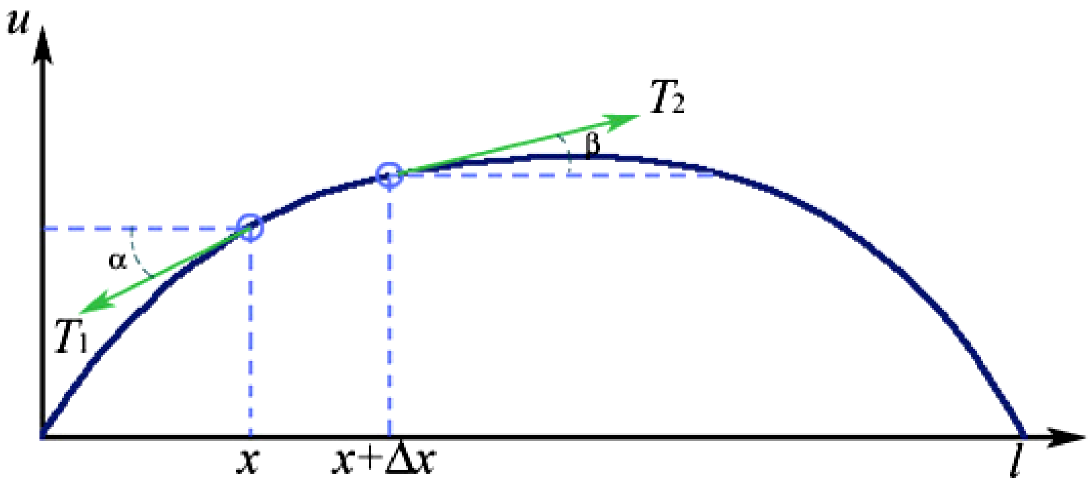
Hugo Franco, PhD

2 de mayo de 2015

Ejemplo: cuerda vibrante (ec. de onda 1D)

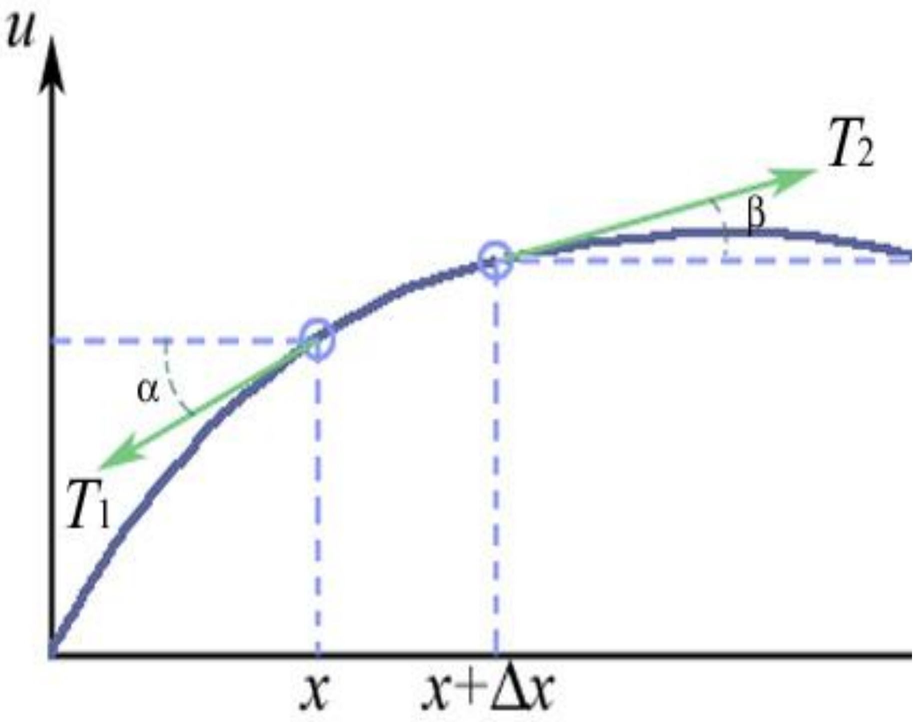
- El diseño de cuerdas a través de una solución formal no es un procedimiento trivial, implica el empleo de herramientas matemáticas.
- **Objetivo del modelado**: desarrollar un método para asistir el diseño de cuerdas para instrumentos musicales y que permita verificar la afinación de las mismas cuando se tensen en el instrumento

Simplificaciones



- La masa de la cuerda por unidad de longitud es constante (cuerda homogénea).
- La cuerda es perfectamente elástica y no ofrece resistencia a la deformación transversal.
- La tensión inicial de la cuerda antes de ser deformada es tan grande que el efecto del peso de la cuerda puede despreciarse.
- La oscilación de la cuerda puede ser representada como el movimiento de cada una de las partículas de la cuerda en sentido vertical.

Ejemplo: Cuerda Vibrante



Ecuación de Conservación:

$$\boxed{\sum F_x = 0}$$

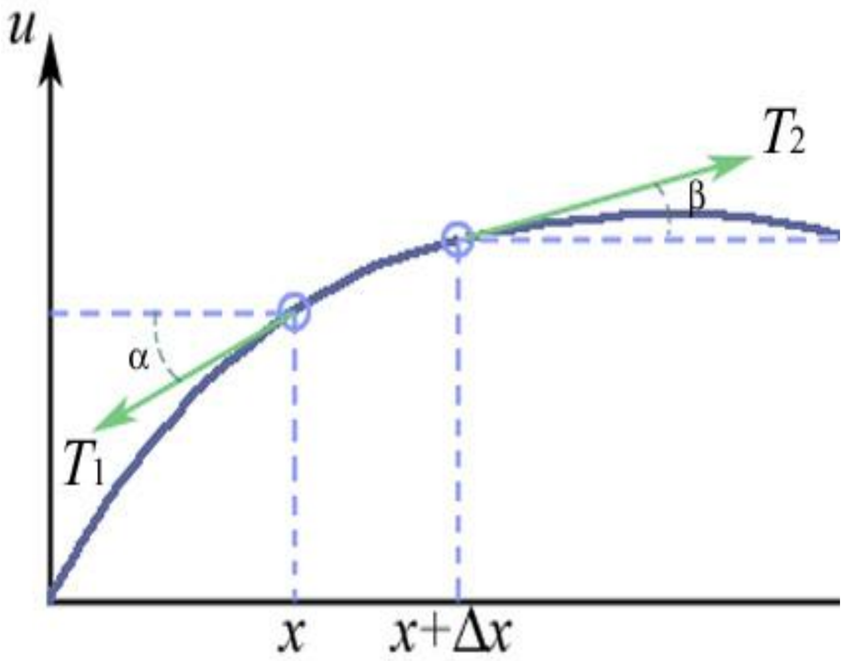
$$\boxed{T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T_0}$$

$$\boxed{\sum F_y = m.a}$$

$$\boxed{T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho\Delta x}{T_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ejemplo: Cuerda Vibrante



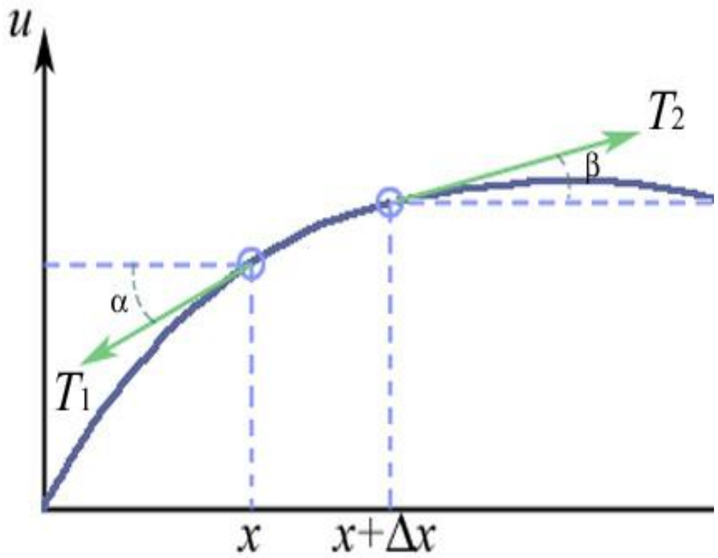
$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho \Delta x}{T_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

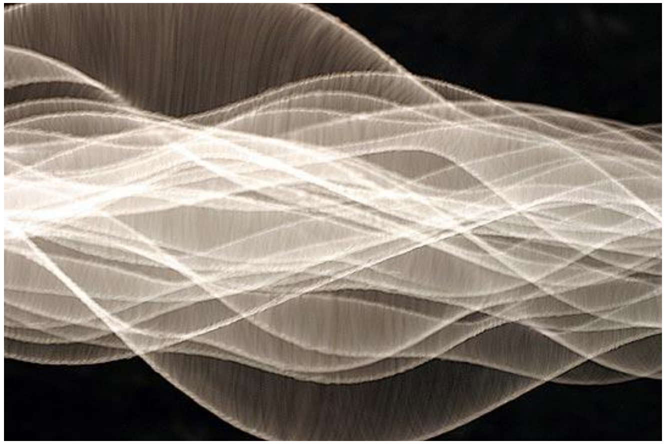
$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x$$

$$\tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Formulación de la Ecuación de Onda 1D





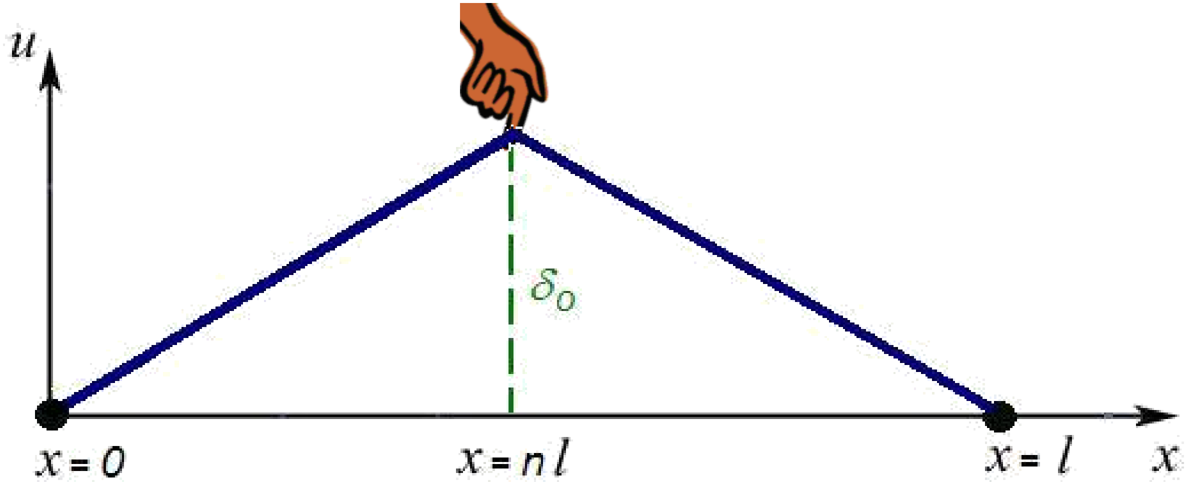
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$c^2 = \frac{T_0}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Ecuación Unidimensional de Onda

Cuerda Vibrante: Solución Analítica (Ecuaciones Auxiliares)



- **Condiciones de Borde**:

$$u\,(0,\,t) = 0 \qquad u\,(l,\,t) = 0$$

- **Condiciones Iniciales:**

$$u\,(x,\,0) = f\,(x) \qquad \dot{u}\,(x,\,0) = g\,(x)$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Una solución puede ser construida **asumiendo** una función solución **u(x,t)** que este formada por el producto de dos funciones **F(x)** y **G(t)**, cada una de las cuales solo dependen de una variable.

$$u(x, t) = F(x).G(t)$$

Al aplicar esta función en la ecuación diferencial se encuentra que:

$$F(x).\ddot{G}(t) = c^2 G(t) F''(x)$$

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2.G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

De lo anterior se puede concluir que el desarrollo del modelo se ha convertido en la solución simultánea de dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La primera con unas condiciones de borde dadas, la segunda con unas condiciones iniciales bien definidas.

Sistema de dos E.D.O´s

$$\begin{cases} F''(x) - k.F(x) = 0 \\ \ddot{G}(t) - k.c^2.G(t) = 0 \end{cases}$$

Para solucionar la primera de las E.D.O´s, se tiene una ecuación característica de la forma:

$$m^2 - k = 0$$

$$F(x) = A.e^{\mu x} + B.e^{-\mu x} \qquad \text{con:} \qquad k = \mu^2$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Conociendo las condiciones de borde, entonces:

$$A = 0 \qquad B = 0$$

$$\boxed{F(x) = 0}$$ Solución trivial ….!!

Si se suponen valores negativos de ***k***:

$$k = -p^2$$

$$F(x) = A.e^{ipx} + B.e^{-ipx}$$

Lo que puede reescribirse en términos de senos y cosenos como:

$$F(x) = A[Cos(px) + iSen(px)]$$
$$+B[Cos(px) - iSen(px)]$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Lo que es igual a:

$$F(x) = A' \cos(px) + B' \operatorname{Sen}(px)$$

Usando las condiciones de frontera, se encuentran nuevamente los valores de los coeficientes desconocidos.

$$F(0) = A' \cos(0) + B' \operatorname{Sen}(0) = 0 \longrightarrow A' = 0$$

$$F(l) = \cancel{A'} \cos(pl) + B' \operatorname{Sen}(pl) = 0 \longrightarrow p = \frac{n\pi}{l}$$

$$\boxed{k = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}$$

$$\boxed{F(x) = B' \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

B´ no influye en la satisfacción de la E.D.O, ni en sus condiciones de frontera, entonces puede tomar cualquier valor, p. ej. la unidad.

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Finalmente ya se tiene la solución de una de las funciones …

$$\boxed{F(x) = \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

Incluir la componente temporal implica desarrollar la E.D.O:

$$\ddot{G}(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 . c^2 . G(t) = 0$$

$$\ddot{G}(t) + \lambda_n^{\,2} . G(t) = 0$$

La solución de esta ecuación tendrá la forma:

$$G(t) = C_n \,\mathrm{Cos}\,(\lambda_n t) + D_n \,\mathrm{Sen}\,(\lambda_n t)$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Y la función solución **u(x,t)** tendrá la forma:

$$u(x,t) = [C_n \operatorname{Cos}(\lambda_n t) + D_n \operatorname{Sen}(\lambda_n t)] . \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Aunque la solución general será una combinación lineal de todas las soluciones que pueden obtenerse para n=1,…..,∞ .

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \operatorname{Cos}(\lambda_n t) + D_n \operatorname{Sen}(\lambda_n t)] . \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right)}$$

Obsérvese que para los valores de ***x***:

$$x = \frac{l}{n}, \frac{2\,l}{n}, \ldots., \frac{n-1}{n} l \longrightarrow u(x,t) = 0$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Para determinar el valor de los ***n*** coeficientes $\boldsymbol{C_n}$ y $\boldsymbol{D_n}$, se requiere evaluar las condiciones iniciales. Con la primera condición inicial:

$$u\,(x,\,0) = f\,(x)$$

$$u\,(x,\,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n . \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right) = f\,(x)$$

Es decir, la función de forma inicial ***f(x)*** se está expresada como una expansión en series de Fourier, y:

$$\boxed{C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f\,(x)\;.\mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right) dx}$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

En cuanto a la segunda condición inicial:

$$\dot{u}\,(x,\ 0) = g\,(x)$$

$$\dot{u}\,(x,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \,.\, \lambda_n \,.\, \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\, x\right) = g\,(x)$$

Se ve como la función ***g(x)*** se está expresanda también como una expansión en series de Fourier, donde:

$$\boxed{D_n = \frac{2}{l\,.\,\lambda_n} \int_0^l g\,(x)\ .\,\mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\, x\right) dx}$$

Nota: Obsérvese que si la velocidad inicial es nula ***g(x) = 0***, no hay coeficientes D_n, de modo que la solución general se reduce.