Introducción al Algebra Lineal

Independencia Lineal, Espacios vectoriales, Transformaciones Lineales y valores y vectores propios

Darwin Eduardo Martínez Riaño
dmartinezr6@ucentral.edu.co
Camilo Espejo
camilo.espejo@utadeo.edu.co

Maestría en Modelado y Simulación
Universidad Central y Universidad Jorge Tadeo Lozano

Thursday 31st March, 2016

Fundamentos Matemáticos para el Modelado y la Simulación

Agenda

Agenda

1. Independencia lineal y rango de una matriz
   - Independencia lineal y dependencia de vectores
   - Rango de una matriz
2. Espacios vectoriales
3. Valores y vectores propios

Combinación lineal

Combinación lineal

Un vector $\mathbf{x}$ es una combinación lineal de un conjunto de vectores $\{\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}\} \in (\mathcal{V}, \mathbb{K})$ si se puede expresar como la suma de los vectores, multiplicado cada uno de ellos por un coeficiente escalar $c_1, \cdots, c_m$ respectivamente

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \sum_{i=1}^{m} c_i\mathbf{a}_{(i)}$$

$$\begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 \\ 42 \\ 24 \\ 54 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 \\ -21 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Independencia y dependencia lineal
Definición

Considere

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0} \tag{1}$$

la ecuación 1 es válida, si y solo si, todos los escalares c_j son cero. Entonces los vectores $\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}$ son linealmente independientes si ningún vector $\mathbf{a}_j \in \{\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}\}$ puede representarse como combinación lineal de los otros vectores en el conjunto.
De manera similar si existe al menos un vector $\mathbf{a}_j$ que sea combinación de otros vectores entonces es dependiente linealmente

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{m} c_i\mathbf{a}_{(i)} \quad \forall i \neq j$$

Independencia lineal
Ejemplo

Considere:

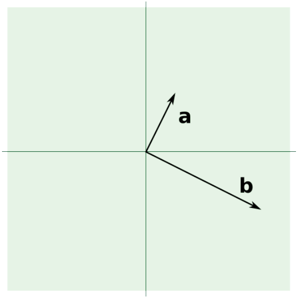
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sean α_1 y α_2 dos números reales tales que

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o en su representación como ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$



Independencia lineal
Ejemplo

Considere:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

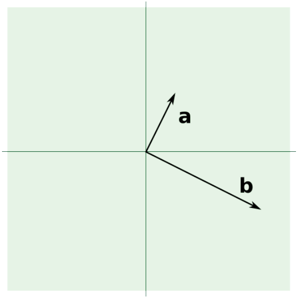
Sean α_1 y α_2 dos números reales tales que

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o en su representación como ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por qué se iguala a cero?



Independencia lineal

Ejemplo

Considere:

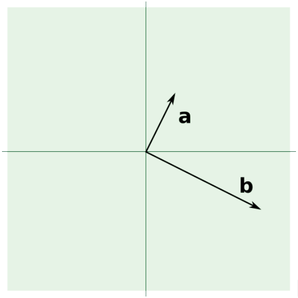
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sean α_1 y α_2 dos números reales tales que

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o en su representación como ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$



La única solución para el sistema es $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$

Independencia lineal
Ejemplo

Considere:

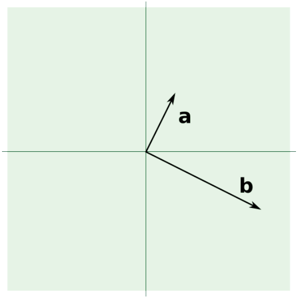
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sean α_1 y α_2 dos números reales tales que

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o en su representación como ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$



a y **b** son dependientes si van en la misma dirección

a y **b** son independientes forman el plano(Espacio 2D)

Rango de una matriz

Definición

Matrix rank

The rank of a matrix or a linear transformation[a] is the dimension of the image of the matrix or the linear transformation, corresponding to the number of linearly independent rows or columns of the matrix, or to the number of nonzero singular values of the map.

[a] http://mathworld.wolfram.com/MatrixRank.html

Se denota por $\texttt{rango}\mathbf{A}$

Rango de una matriz
Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

el $\texttt{rango}\ \mathbf{A} = 2$, porque el vector de la primera fila es una combinación lineal de los otros dos vectores fila en $\mathbf{A}$

Una matriz $\mathbf{A}_1$ es equivalente por filas a una matriz $\mathbf{A}_2$ si $\mathbf{A}_1$ se puede obtener a partir de $\mathbf{A}_2$ por un conjunto finito de operaciones sobre filas. Las matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango.

Rango de una matriz
Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ Fila2 + 2Fila1 \\ Fila3 - 7Fila1 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ Fila3 - \frac{1}{2}Fila2 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el $\texttt{rango}\ \mathbf{A} = 2$

Agenda

1 Independencia lineal y rango de una matriz

2 Espacios vectoriales
- Espacios vectoriales
- Espacios con producto interior

3 Valores y vectores propios

Espacios vectoriales

Definición y propiedades

Espacio Vectorial

Un espacio vectorial sobre un cuerpo K (colección de escalares) es un conjunto V no vacio, de vectores con las dos operaciones algebráicas *suma y multiplicación por un escalar*

Para que V sea considerado un espacio vectorial se deben cumplir las siguientes condiciones para todos los elementos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ y cualquier escalar α y β en K:

- ⋆ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- ⋆ $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- ⋆ $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- ⋆ $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
- ⋆ $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
- ⋆ $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$
- ⋆ $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$
- ⋆ $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Por ejemplo, el espacio euclideano n-dimensional $\mathbb{R}^n$

Espacios vectoriales

Términos y ejemplos

Dimensión

Es el número máximo de vectores linealmente independientes en V y se denota por dim V

Base

Es un conjunto ordenado de vectores en V compuesto por el máximo número posible de vectores linalmente independiente de V, tal que:

- ⋆ Todos los elementos de la base pertenecen a V.
- ⋆ Todo elemento de V se puede escribir como combinacin lineal de los elementos de la base.

Espacios vectoriales

Términos y ejemplos

Dimensión

Es el número máximo de vectores linealmente independientes en V y se denota por dim V

Base

Es un conjunto ordenado de vectores en V compuesto por el máximo número posible de vectores linalmente independiente de V, tal que:

- ⋆ Todos los elementos de la base pertenecen a V.
- ⋆ Todo elemento de V se puede escribir como combinacin lineal de los elementos de la base.

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$$

la cual es conocida como base cannica de $\mathbb{R}^3$.

Otras bases de $\mathbb{R}^3$ son:

$$\begin{cases} \mathcal{B}' = \{(2,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\} \\ \mathcal{B}'' = \{(1,1,1); (1,1,0); (1,0,0)\} \\ \mathcal{B}''' = \{(504,0,0); (0,7,0); (0,0,1/2)\} \end{cases}$$

Espacios vectoriales

Términos y ejemplos

- Los vectores de n componenentes que conforman el espacio real *$n-$ dimensional* ($\mathbb{R}^n$) son llamados vectores reales. Cada vector en $\mathbb{R}^n$ es una $n-$tupla ordenada de números reales.
- De manera similar, al tomar $n-$tuplas de números complejos como vectores y números complejos como escalares, obtenemos el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^n$
- Adicionalmente, existen otros conjunto de interes especial para los cuales se puede definir la adición y la multiplicación escalar por lo cual forman espacios vectoriales de manera natural. Por ejemplo: Matrices, funciones y transformaciones.

Espacios con producto interior
Definición

Real Inner Product Space

A real vector space V is called a real inner product space if it has the following property. With every pair of vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ in V there is associated a real number, which is denoted by $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ and is called the inner product of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, such that the following axioms are satisfied.

I For all scalars q_1 and q_2 and all vectors $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in V$,

$$(q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b}, \mathbf{c}) = q_1(\mathbf{ac}) + q_2(\mathbf{bc}) \qquad (\textit{Linearity})$$

II For all vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ in V,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \qquad (\textit{Symmetry})$$

III For every $\mathbf{a}$ in V,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) &\geqq 0 \\ (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \text{ if and only if } \mathbf{a} &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (\textit{Positive} - \textit{definiteness})$$

Espacios con producto interior
Propiedades

Si **a** y **b** son vectores columna en $\mathbb{R}^n$, podemos formar el producto $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$. Esto es una matriz de 1×1, la cual podemos identificar con una componente sencillo, es decir con un número. Este producto es llamado el producto interno o producto punto de **a** y **b**. Otras notaciones par el son $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ entonces:

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Los vectores cuyo porducto interno es cero son llamados ortogonales. La *longitud* o **norma** de un vector en V esta definida por

$$\| \mathbf{a} \| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \quad (\geqq 0) \tag{2}$$

Un vector con norma 1 es llamado vector unitario.

Espacios con producto interior
Propiedades

From these axioms and from (2) one can derive the basic inequality

$$|(\mathbf{a},\mathbf{b})| \geqq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \quad \text{(CauchySchwarz inequality)} \tag{3}$$

From this follows

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \geqq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \quad \text{(Triangle inequality)} \tag{4}$$

A simple direct calculation gives

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2) \quad \text{(Parallelogram equality)} \tag{5}$$

Ejemplo:Espacio Euclidiano $n-$dimensional

$\mathbb{R}^n$ con el producto interno

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \tag{6}$$

Llamado E^n o simplemente $\mathbb{R}^n$. Los axiomas se muestran por cálculo directo, así la ecuación 2 nos da la norma euclideana

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 \tag{7}$$

Espacios con producto interno

Ejemplo: espacio de funciones

El conjunto de todas las funciones continuas de valores reales $f(x), g(x), \ldots$ en un intervalo dado $\alpha \leq x \leq \beta$. En este Espacio funcional podemos definir el producto interno por la integral

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \tag{8}$$

Los axiomas pueden ser verificados por calculo directo, así la ecuación 2 nos da la norma:

$$\| f \| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx} \tag{9}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL
Universidad de Bogotá JORGE TADEO LOZANO

Agenda

UNIVERSIDAD CENTRAL

Universidad de Bogotá JORGE TADEO LOZANO

Valores y vectores propios

Definción

Definción

Let **A** be a linear transformation represented by a matrix **A**. If there is a vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \neq 0$ such that

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{10}$$

for some scalar λ, then λ is called the eigenvalue of **A** with corresponding (right) eigenvector **x**.

Valores y vectores propios

Definición

Letting **A** be a $k \times k$ square matrix

$$\begin{bmatrix} a_(11) & a_(12) & \cdots & a_(1k) \\ a_(21) & a_(22) & \cdots & a_(2k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_(k1) & a_(k2) & \cdots & a_(kk) \end{bmatrix} \tag{11}$$

with eigenvalue λ, then the corresponding eigenvectors satisfy

$$\begin{bmatrix} a_(11) & a_(12) & \cdots & a_(1k) \\ a_(21) & a_(22) & \cdots & a_(2k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_(k1) & a_(k2) & \cdots & a_(kk) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \tag{12}$$

Valores y vectores propios
Definición

which is equivalent to the homogeneous system

$$\begin{bmatrix} a_(11) - \lambda & a_(12) & \cdots & a_(1k) \\ a_(21) & a_(22) - \lambda & \cdots & a_(2k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_(k1) & a_(k2) & \cdots & a_(kk) - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Equation 13 can be written compactly as

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad (14)$$

where **I** is the identity matrix. As shown in Cramer's rule, a linear system of equations has nontrivial solutions iff the determinant vanishes, so the solutions of equation 14 are given by

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}. \qquad (15)$$

This equation is known as the characteristic equation of **A**, and the left-hand side is known as the characteristic polynomial.

Valores y vectores propios
How to find EigenValues and Eigenvectors

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} (-5 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - (2 + \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

because $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ is $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{Ix} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. We see that this is a homogeneous linear system. By Cramers theorem it has a nontrivial solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (an eigenvector of $\mathbf{A}$ we are looking for) if and only if its coefficient determinant is zero.

Valores y vectores propios

How to find EigenValues and Eigenvectors

$$
\begin{aligned}
D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} (-5-\lambda) & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-5-\lambda)(-2-\lambda) - (2)(2) \\
&= \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0
\end{aligned}
$$

The solution of this quadratic equation are $\lambda_1 = -1$ and $\lambda_2 = -6$. These are the eigenvalues of $\mathbf{A}$

Valores y vectores propios

How to find EigenValues and Eigenvectors

The Eigenvector of **A** corresponding to λ_1.

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

A solution is $x_2 = 2x_1$, as we see from either of the two equations, so that we need only one of them. This determines an eigenvector corresponding to $\lambda_1 = -1$ up to a scalar multiple. If we choose $x_1 = 1$, we obtain the eigenvector

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathit{Check}: \quad \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$$

Valores y vectores propios

How to find EigenValues and Eigenvectors

The Eigenvector of **A** corresponding to $\lambda_2 = -6$.

$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

A solution is $x_2 = -\frac{x_1}{2}$, with arbitrary x_1. If we choose $x_1 = 2$, we get $x_2 = -1$ the eigenvectorof **A** corresponding to λ_2 is

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Check: \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = (-6)\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2$$