# Modelado a partir de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDDPs)

## Algunos casos representativos

UNIVERSIDAD CENTRAL

Hugo Franco, PhD

2 de mayo de 2015

# Clasificación de las PDE de segundo orden

Definiendo la ecuación diferencial parcial de segundo orden en su forma canónica, se tiene:

$$a \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + e \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$= G(x, y)$$

| | |
|---|---|
| $b - 4ac > 0$ | Hiperbólica |
| $b - 4ac = 0$ | Parabólica |
| $b - 4ac < 0$ | Elíptica |

# Ejemplos

- Ecuación Parabólica:

  *Ecuación de Difusión*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Ecuación Elíptica:

  *Ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- Ecuación Hiperbólica:
  - Hiperbólica de primer orden

    *Ecuación de Advección*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu \frac{\partial u}{\partial x}$$

  - Hiperbólica de segundo orden

    *Ecuación de Onda*

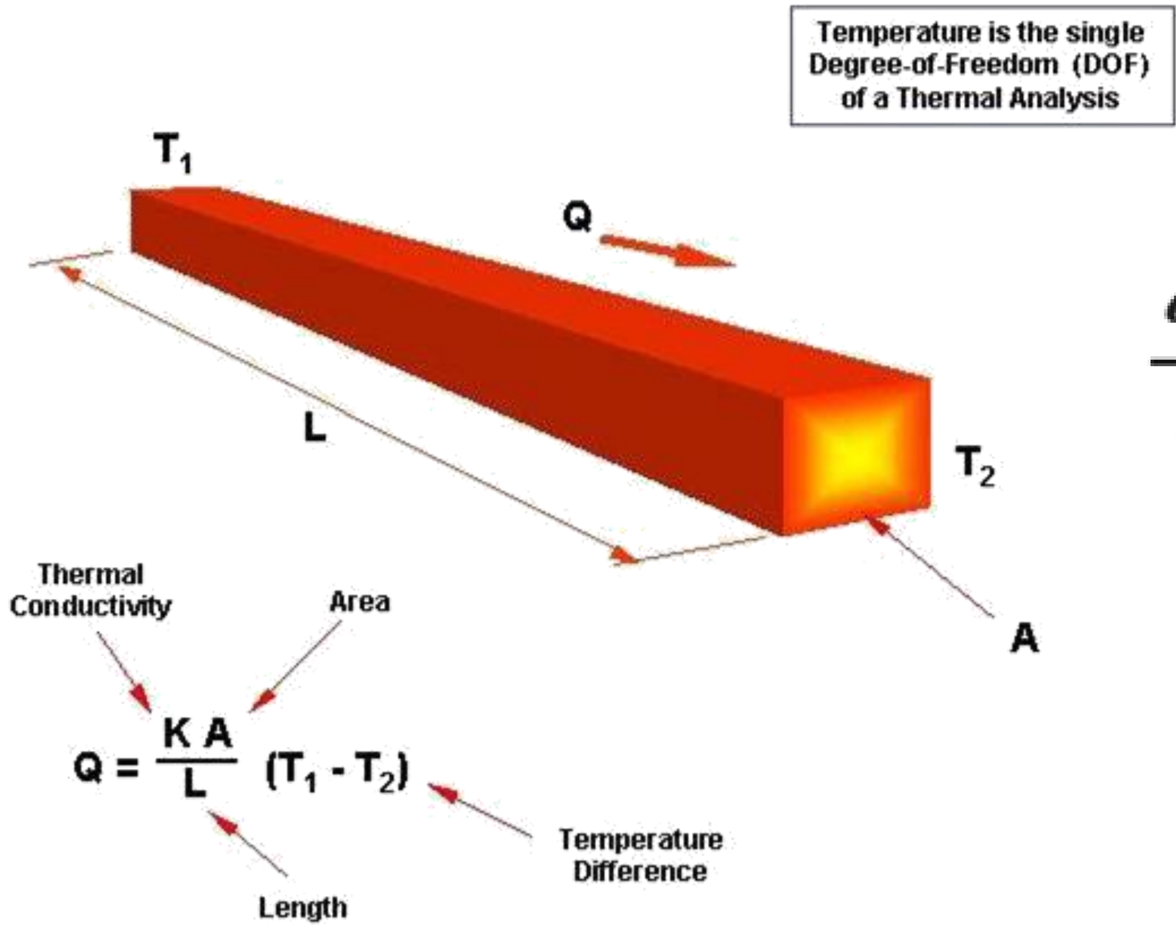
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

# Condiciones auxiliares asociadas a una EDDP

- Condiciones de Borde:
  - Condiciones de Dirichlet: $u(0,t) = u_0(t)$
  - Condiciones de Neumann: $\dfrac{\partial u(L,t)}{\partial x} = u_x(L,t) = g(t)$
  - Condiciones de Robin o Fourier: $D\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \nu\, u(0,t)$
- Condiciones Iniciales

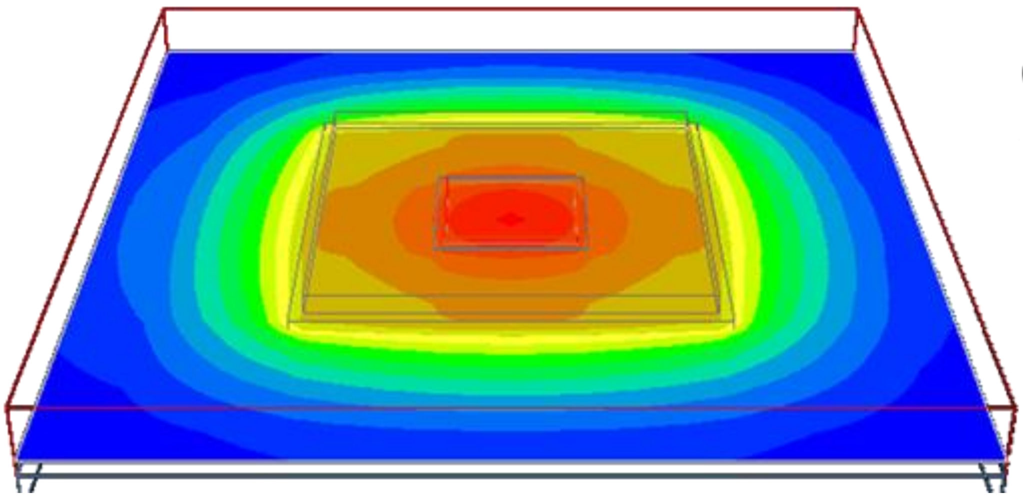
# Ejemplos de ecuaciones diferenciales asociadas a fenómenos físicos

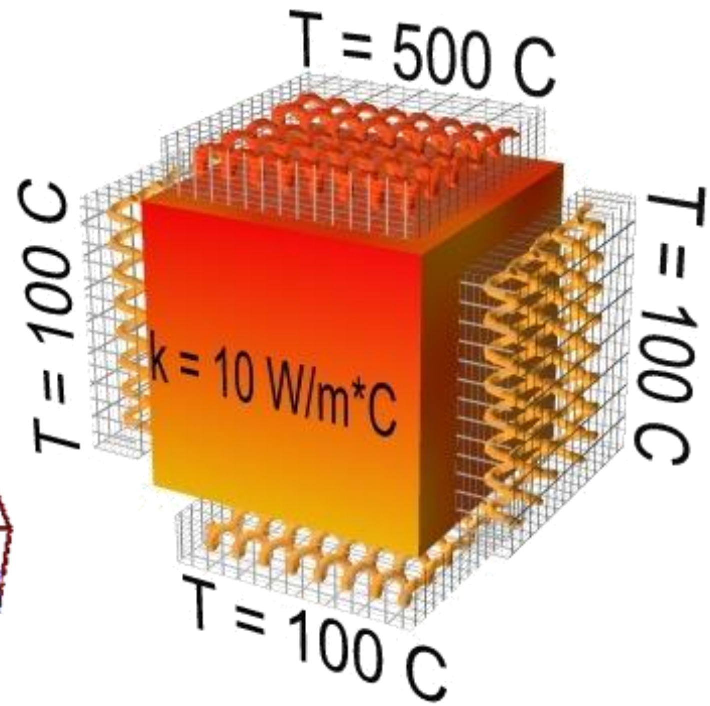
# Ecuación de la Conducción de Calor 1D




$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

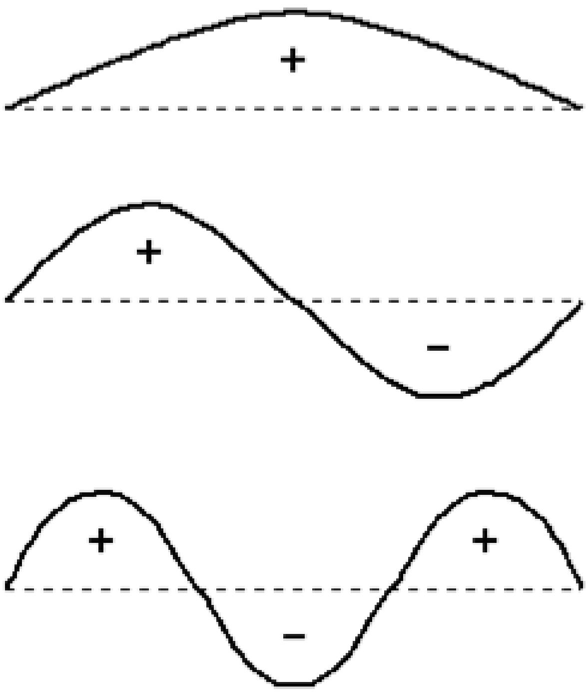
# Ecuación general para la conducción de calor






$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{k} q_{gen}$$

# Ecuación de la onda para un dominio 1D



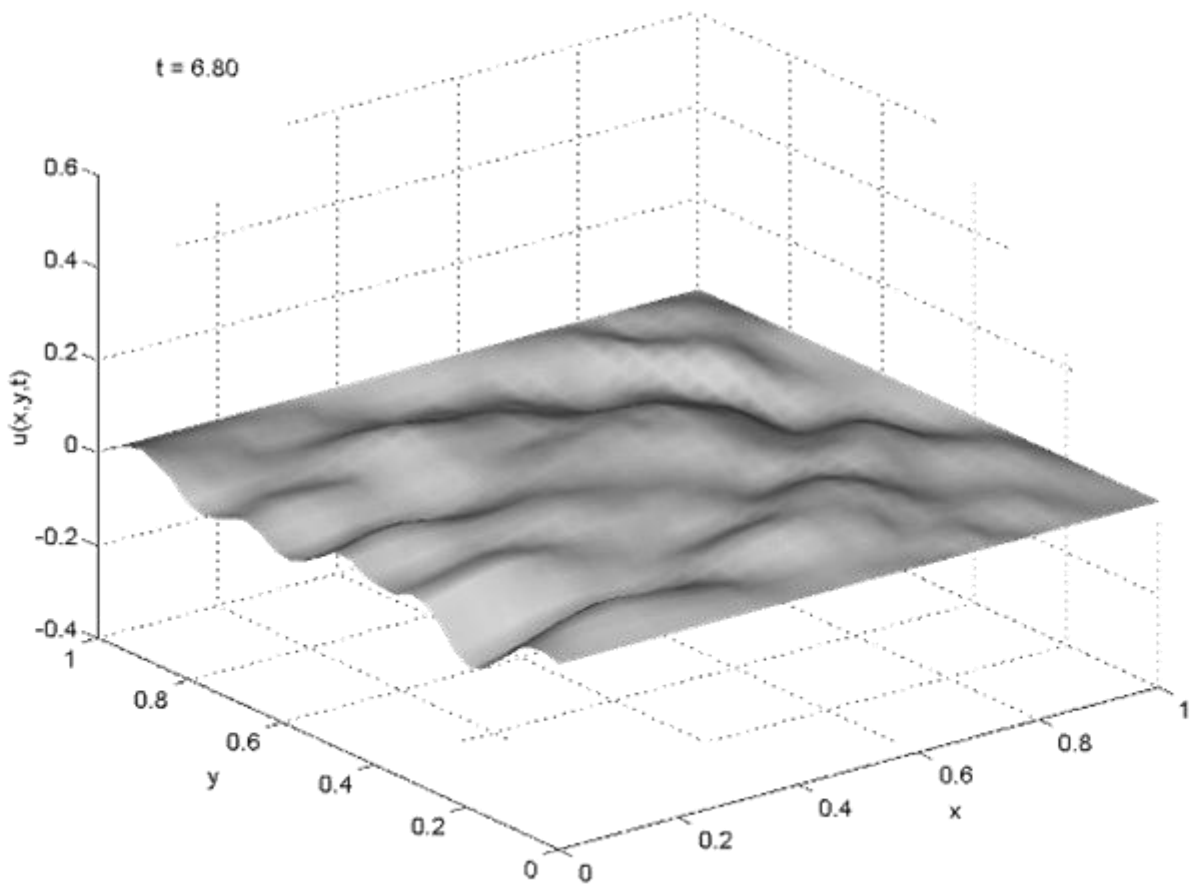

Frecuencia más baja ($\lambda_1$)

Segunda frecuencia ($\lambda_2$)

Tercera frecuencia ($\lambda_3$)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

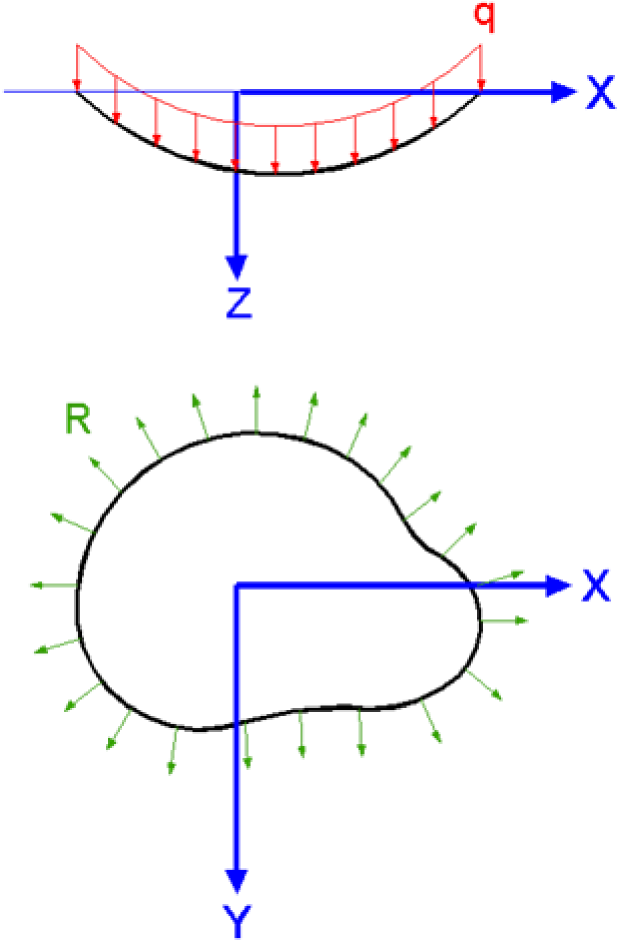
# Ecuación de la onda para un dominio 2D




$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

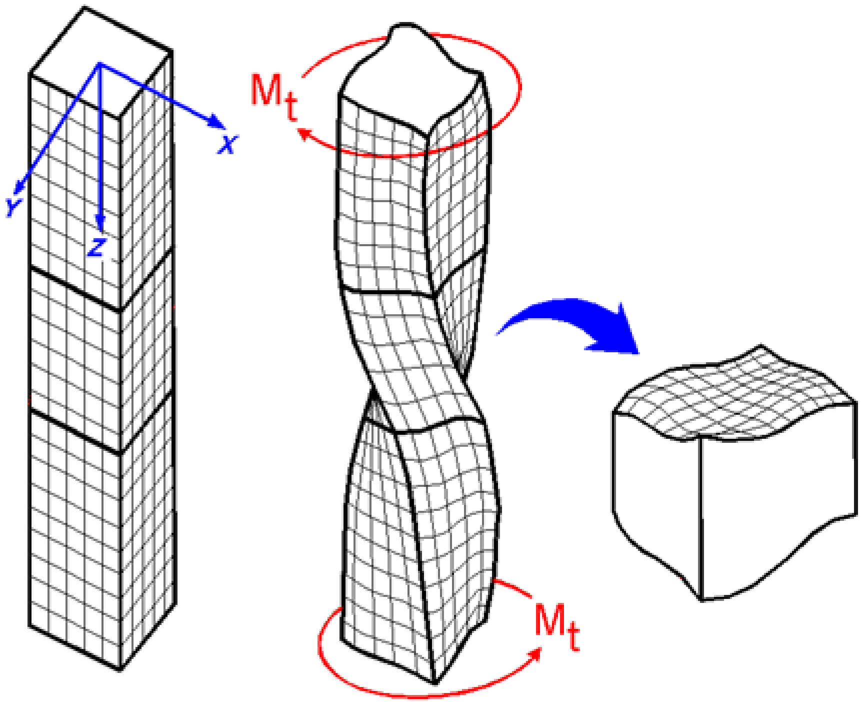
# Ecuación para la deflexión de una membrana

- Se asume una membrana elástica




$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{R}$$

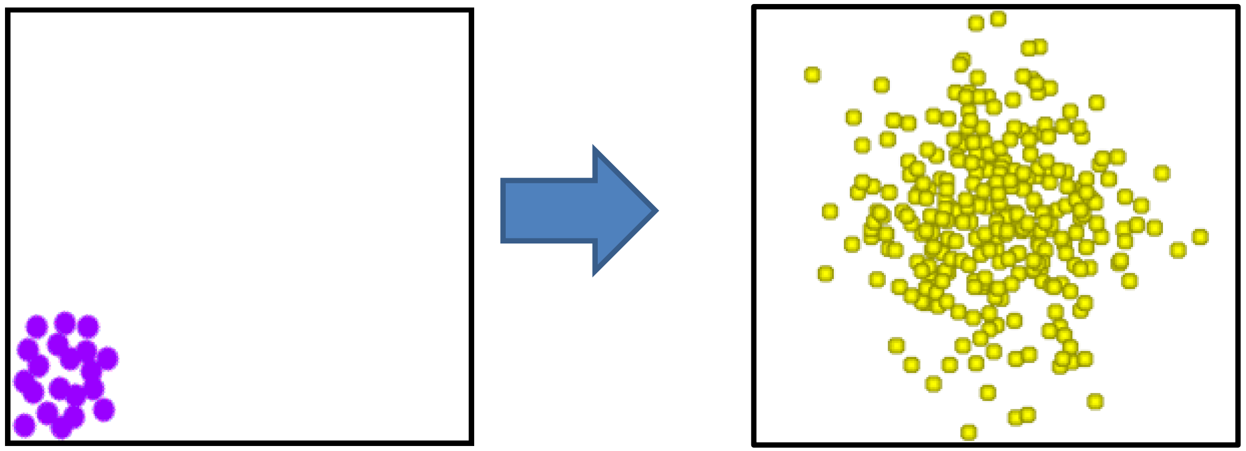
# Torsión en barras prismáticas




$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

# Difusión

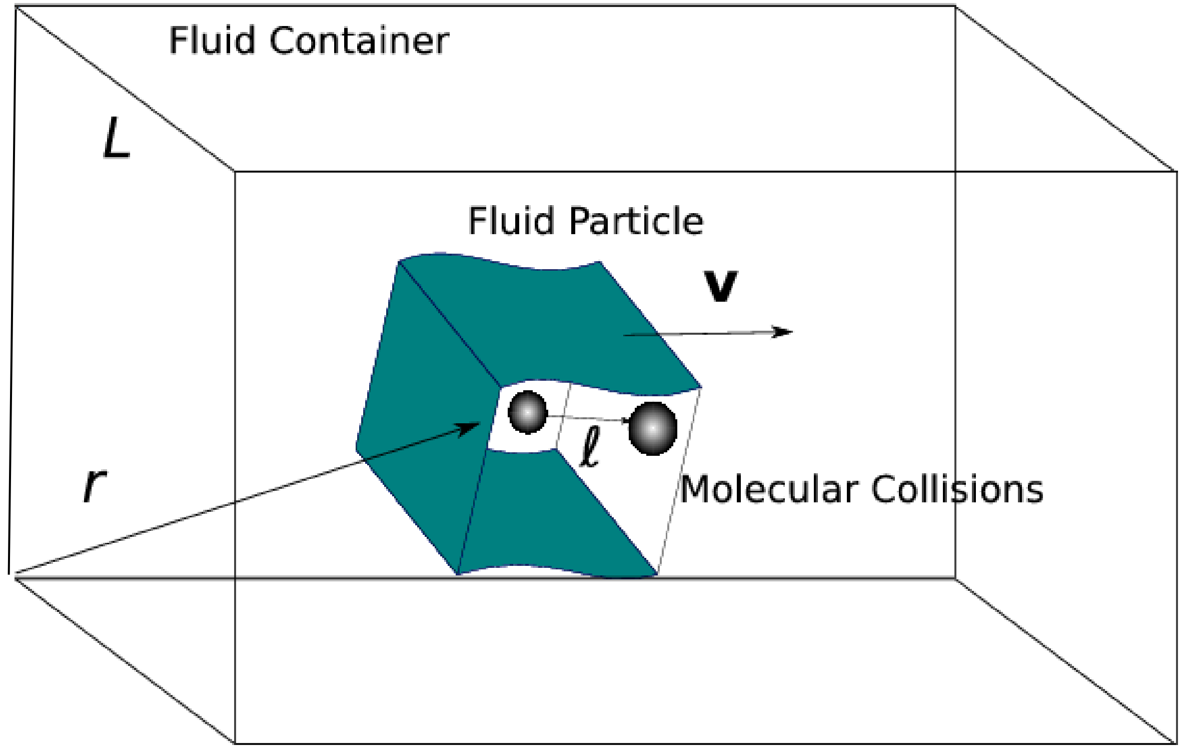


$$u_t = k\,\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} = k\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) U(x, y, t)$$

# Ejemplos de modelado físico a partir de leyes y principios

# Ejemplo: Ecuación de transporte




- Para establecer la dinámica del Sistema fluido, es necesario estimar la tasa de cambio de velocidad de cada partícula fluida, de acuerdo a las interacciones internas y externas del sistema

# Ejemplo: Ecuación de transporte

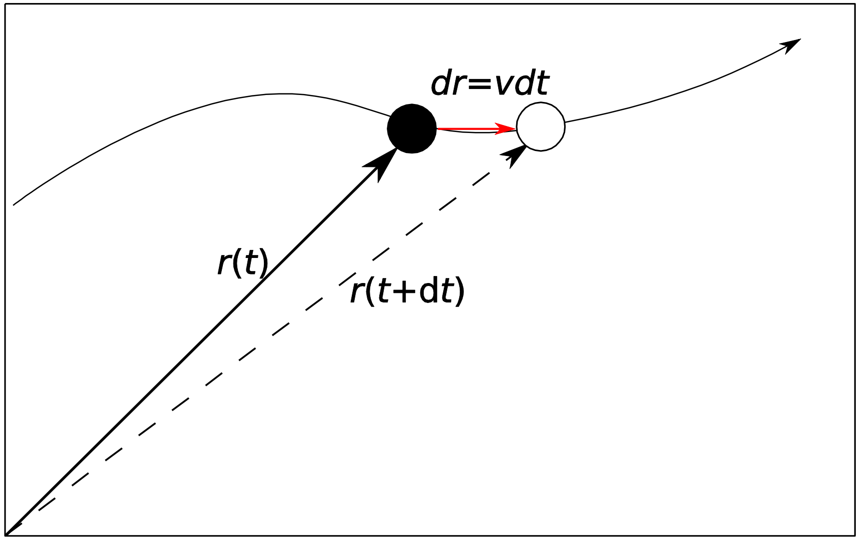
- **Partícula Fluida:** elemento mínimo de volumen en un fluido que cumple la hipótesis del continuo - Número de Knudsen:

$$\ell/L \ll 1$$

  Aquí, $\ell$ es el recorrido mínimo libre y *L* es la longitud característica macroscópica

- Sea **r**(*t*) la posición de la partícula fluida en el contenedor del fluiido en el tiempo *t* (aproximación Lagrangiana. La velocidad de la partícula a lo largo de su trayectoria es:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \;\; \mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0$$



# Ejemplo: Ecuación de transporte

Por la definición de velocidad, en $t$ + d$t$ la partícula fluida estará en la posición **r** + d**r** = **r** + **v** (**r** , $t$) d$t$ . Así, su velocidad en esta nueva posición se puede aproximar por Series de Taylor:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)dt, t+dt) \quad = \quad \mathbf{v}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} dt + \left[\sum v_i(\mathbf{r},t)\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial x_i}\right] dt + O(t^2)$$

La aceleración de la partícula se estima mediante la aplicación de la definición de derivada para la velocidad en **r** + $d$**r**:

$$\begin{aligned}
\lim_{dt\to 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)dt, t+dt) - \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{dt} \quad &= \quad \left[\sum v_i(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right] + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\
&= \quad \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla)\,\mathbf{v}(\mathbf{r},t)
\end{aligned}$$

Luego, usando notación de operadores, la aceleración en su trayectoria es:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$$

The operator D/D$t$ = (∂/∂$t$ + **v**     ) es llamado “derivada material”

# Derivación intuitiva de la ecuación de transporte

- Ley de conservación relevante: segunda Ley de Newton

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{f}_i$$

- La correspondencia directa con el sistema fluido asumiendo que éste es incompresible, lleva a:

$$\underbrace{\int_{V_c} \rho dV_c}_{mass} \underbrace{\frac{D}{Dt}\mathbf{v}}_{acceleration} = \underbrace{-\nabla p}_{pressure\ difference} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{viscosity\ resistance}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

- Esta es la ecuación de Navier-Stokes para el transporte de momento (para fluidos incompresibles sin fuerzas

  externas $V_c$ se toma como la unidad)