Apuntes de cálculo en una variable real

Eduardo Liz Marzán

Vigo, Diciembre de 2006

Índice General

Introducción

En algunos planes de estudio de las ingenierías queda todavía una primera asignatura de Cálculo dedicada al cálculo en una variable real. A mí particularmente me parece muy útil empezar a construir las casas desde los cimientos, por lo que soy plenamente partidario de seguir impartiendo este curso. En la E. T. S. de Ingenieros de Minas de la Universidad de Vigo se le dedican 45 horas de clase en las que es posible explicar la materia que aquí se recoge con abundantes ejercicios y ejemplos explicativos.

La parte teórica de este libro contiene los principales conceptos, resultados y propiedades con algunos ejemplos. Sólo se incluyen algunas demostraciones sencillas, que juegan el papel de mostrar que muchas veces los resultados más útiles no son los más complicados. La ausencia de demostraciones permite tomarse ciertas licencias en cuanto al orden de los contenidos (que me perdonen los más puristas).

Tampoco se incluye material como tablas de derivadas porque se supone que el alumno que se matricula en primero de ingeniería debe manejar perfectamente ese tipo de cosas.

Se añadirá posteriormente una parte de ejercicios basada en exámenes de Cálculo I de Minas. Mientras siga impartiendo la asignatura, esa parte crecerá con cada nueva convocatoria y los nuevos exámenes resueltos se pueden descargar en mi página web

`http://www.dma.uvigo.es/~eliz/c1minas.html`

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción.

En este curso se estudia el cálculo en una variable real, con lo que el conjunto protagonista es el de los números reales, que denotaremos por $\mathbb{R}$. En este capítulo preliminar recordaremos algunas cuestiones importantes que se utilizan en los temas siguientes, como la relación de orden total de los números reales, el valor absoluto y el concepto de función.

1.2 La relación de orden en el conjunto de los números reales.

Una característica fundamental en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es que existe una relación de orden total compatible con las operaciones. En particular, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $x \leq y$ y $z \in \mathbb{R}$ entonces $x + z \leq y + z$.
2. Si $x \leq y$ y $\lambda > 0$ entonces $\lambda x \leq \lambda y$.
3. Si $x \leq y$ y $\lambda < 0$ entonces $\lambda x \geq \lambda y$. En particular, $x \leq y \Longrightarrow -x \geq -y$.
4. Si $0 < x < y$ entonces $0 < 1/y < 1/x$.

Intervalos.

La relación de orden permite definir los intervalos, que son los subconjuntos de números reales que usaremos más habitualmente. Si a, b son dos números reales tales que $a < b$, se definen los siguientes intervalos:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$ (Intervalo **abierto** de extremos a y b).
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$ (Intervalo **cerrado** de extremos a y b).
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$.

Observaciones:

1. Estos dos últimos se llaman intervalos semiabiertos o semicerrados.

2. Todos estos tipos de intervalos se llaman intervalos finitos o acotados. Los intervalos cerrados acotados $[a, b]$ se llaman también **intervalos compactos**.

Existen otros intervalos infinitos o no acotados:

- **Abiertos:** $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < b\}$.

- **Cerrados:** $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq b\}$.

Obsérvese que $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ también es un intervalo no acotado.

1.3 El valor absoluto.

Se define el valor absoluto de un número real x como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades

1. $|x| \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y además $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

2. $|x| = |-x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

4. $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

5. Si $r > 0$ entonces $|x| \leq r \Longleftrightarrow -r \leq x \leq r \Longleftrightarrow x \in [-r, r]$.

La propiedad 5 permite caracterizar el intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$ centrado en $x_0 \in \mathbb{R}$ y de radio $r > 0$ en términos del valor absoluto:

$$x \in [x_0 - r, x_0 + r] \Longleftrightarrow |x - x_0| \leq r.$$

Lo mismo se obtiene para intervalos abiertos utilizando la desigualdad estricta.

1.4 Funciones reales de variable real.

Las funciones reales de variable real son el objeto principal de los primeros temas del curso. En esta sección repasamos algunos conceptos relacionados.

Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una **función** real de variable real (en adelante nos referiremos a ella únicamente como función) es una correspondencia $f : D \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número $x \in D$ un único número $f(x) \in \mathbb{R}$ que se llama **imagen** de x.

El conjunto D se llama dominio de definición de f. Se llama imagen de f o rango de f al conjunto $f(D) = \{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$.

Por ejemplo, la aplicación $f(x) = \ln(x)$ está definida únicamente en $D = (0, \infty)$ y su imagen es $f(D) = \mathbb{R}$, ya que todo número real y se puede escribir como $y = \ln(e^y) = f(e^y)$.

Composición de funciones. Sean $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$. Si $f(D_1) \subset D_2$, se puede definir la composición $(g \circ f) : D_1 \to \mathbb{R}$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall\, x \in D_1$.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \ln(x)$, se define $(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(x^2 + 1),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Se dice que dos funciones $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ son **inversas** si $(g \circ f)(x) = x$, $\forall\, x \in D_1$ y $(f \circ g)(y) = y$, $\forall\, y \in D_2$. Si f y g son inversas, se denota $g = f^{-1}$.

Por ejemplo, las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$ son inversas ya que

$$g(f(x)) = \ln(e^x) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f(g(y)) = e^{\ln(y)} = y,\ \forall\, y \in (0, \infty).$$

En general, aunque una función $f : D \to \mathbb{R}$ tenga inversa, no es sencillo calcularla. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + e^x$ tiene inversa pero no se puede encontrar una expresión sencilla para ella. En ocasiones, saber que la función tiene inversa también es útil, aunque no se pueda calcular explícitamente.

Las funciones que tienen inversa se llaman **funciones inyectivas**. Se caracterizan por la siguiente propiedad: f es inyectiva si y sólo si para cualquier par de números reales distintos $x, y \in D$ sus imágenes $f(x), f(y)$ también son distintas. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es inyectiva ya que $f(-1) = f(1) = 1$.

La clase más interesante de funciones inyectivas son las funciones monótonas.

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es estrictamente **creciente** si para cualquier par de números reales distintos $x, y \in D$ se cumple que $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$. Diremos que f es es estrictamente **decreciente** si $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$. Las funciones estrictamente crecientes o decrecientes se llaman funciones estrictamente monótonas. Es inmediato probar que toda función estrictamente monótona es inyectiva y por tanto tiene inversa. Por ejemplo, la función $f(x) = x + e^x$ mencionada antes es claramente creciente ya que $x < y \Longrightarrow x + e^x < y + e^y$.

Capítulo 2

Límites y continuidad

2.1 Introducción.

En este capítulo se introducen los conceptos de límite de una función en un punto y de límite en infinito. La noción de límite conduce a la importante definición de continuidad. Al final del tema se enuncian varios teoremas importantes que dependen de forma esencial de la continuidad.

2.2 Límite de una función en un punto.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea f una función definida en los intervalos $(x_0 - r, x_0)$ y $(x_0, x_0 + r)$ para algún $r > 0$. Se dice que existe el **límite** de f en x_0 si ocurre una de las siguientes posibilidades:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$ si las imágenes de los puntos cercanos a x_0 se aproximan a y_0. Formalmente,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \iff [\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0 \,/\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0 \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon]\,.$$

2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si las imágenes de los puntos cercanos a x_0 toman valores arbitrariamente grandes. Formalmente,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff [\forall M > 0,\, \exists \delta > 0 \,/\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) > M]\,.$$

3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si las imágenes de los puntos cercanos a x_0 toman valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto. Formalmente,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff [\forall M > 0,\, \exists \delta > 0 \,/\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) < -M]\,.$$

Si no sucede ninguna de las situaciones anteriores, diremos que no existe el límite de f en x_0.

En ocasiones no existe el límite de una función en x_0, pero existe alguno de los límites laterales. El concepto de límite lateral se define de forma muy parecida al de límite.

Sea f una función real. Si x_0 es un número real tal que f está definida en un intervalo $(x_0 - r, x_0)$ para algún $r > 0$ entonces diremos que existe el **límite por la izquierda** de f en x_0 si ocurre una de las siguientes posibilidades:

$$1) \lim_{x \to x_0^-} f(x) = y_0 \Longleftrightarrow [\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0 \,/\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon]\,.$$

$$2) \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \Longleftrightarrow [\forall\, M > 0,\, \exists \delta > 0 \,/\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \Longrightarrow f(x) > M]\,.$$

$$3) \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow [\forall\, M > 0,\, \exists \delta > 0 \,/\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \Longrightarrow f(x) < -M]\,.$$

Si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ se dice que la recta vertical $x = x_0$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f por la izquierda.

De modo completamente análogo (cambiando $(x_0 - \delta, x_0)$ por $(x_0, x_0 + \delta)$) se define el **límite por la derecha** de f en x_0 si f está definida en un intervalo de la forma $(x_0, x_0 + r)$ para algún $r > 0$. Se denota $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ se dice que la recta vertical $x = x_0$ es una asíntota vertical de la gráfica de f por la derecha.

<u>Observación.</u> Si f está definida en intervalos de la forma $(x_0 - r, x_0)$ y $(x_0, x_0 + r)$ para algún $r > 0$ entonces existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ si y sólo si existen los límites laterales y coinciden, es decir, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Por ejemplo, consideremos la función $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/|x|$. Existe $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ ya que $1/|x|$ toma valores arbitrariamente grandes y positivos cuando x se aproxima a cero tanto por la derecha como por la izquierda.

<u>Otros ejemplos:</u>

1. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$. Existe $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ ya que $\ln(x)$ toma valores arbitrariamente grandes y negativos cuando x se aproxima a cero por la derecha.

2. Sea $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$.

$$\lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = \infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\pi/2^+} f(x) = -\infty.$$

3. Sea $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{sen}(x)/x$. Veremos que existe $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

2.3 Continuidad.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I. Se dice que f es **continua** en un punto $x_0 \in I$ si existe el límite de f en x_0 y además

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si f no es continua en x_0, diremos que f tiene una discontinuidad en x_0. Consideraremos dos tipos distintos de discontinuidades:

1. **Discontinuidad de salto.** Se produce cuando existen los límites laterales de f en x_0 pero no coinciden. Se dice que el salto es finito si los dos límites laterales son finitos. Si alguno de ellos es infinito, diremos que el salto es infinito.

2. **Discontinuidad esencial.** Se produce cuando no existe alguno de los límites laterales de f en x_0.

Ejemplos:

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Existe una discontinuidad de salto infinito en $x_0 = 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \operatorname{sen}(0) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Existe una discontinuidad esencial en $x_0 = 0$, ya que no existe $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(1/x)$.

   La razón es que cuando x se aproxima a cero por la derecha, la función f toma todos los valores entre -1 y 1 en cada intervalo de la forma $[1/(k\pi), 1/(k\pi + 2\pi)]$, $k \in \mathbb{N}$.

Se dice que una función es continua en un conjunto A si es continua en todos los puntos de A.

Algunos ejemplos de funciones continuas.

Las funciones más comunes son continuas en sus dominios de definición. Por ejemplo:

- Las funciones polinómicas $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, son continuas en $\mathbb{R}$.

- Las funciones racionales (cocientes de polinomios) $r(x) = p(x)/q(x)$ son continuas en su dominio de definición, es decir, en el conjunto de los números reales x tales que $q(x) \neq 0$.

- La función exponencial e^x es continua en $\mathbb{R}$ y $\ln(x)$ es continua en $(0, \infty)$.
- Las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ y sus inversas $\operatorname{arc\,sen}(x)$, $\arccos(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$ son continuas en sus respectivos dominios de definición.

Los ejemplos anteriores, combinados con las propiedades que enunciamos a continuación, permiten probar la continuidad de muchas funciones.

Propiedades.

1. La composición de funciones continuas es una función continua. Por ejemplo, la función $f(x) = \ln(1 + |\cos(x)|)$ es continua en $\mathbb{R}$ ya que $f(x) = f_1(f_2(f_3(f_4(x))))$, donde $f_1(x) = \ln(x)$, $f_2(x) = 1 + x$, $f_3(x) = |x|$ y $f_4(x) = \cos(x)$ son continuas.
2. Si f y g son funciones continuas en x_0 entonces las funciones $(f+g)$ y $(f \cdot g)$ son continuas en x_0. La función f/g es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$. Por ejemplo, la función $f(x) = e^x/(x-1)$ es continua para todo $x \neq 1$.

2.4 Límites en infinito.

Sea f una función definida en el intervalo (a, ∞) para algún $a \in \mathbb{R}$. Diremos que existe el límite de f en ∞ si ocurre una de las siguientes posibilidades:

$$1)\ \lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 \Longleftrightarrow [\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists M > 0\, /\, x > M \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon]\,.$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longleftrightarrow \big[\forall\, M > 0,\, \exists M' > 0\, /\, x > M' \Longrightarrow f(x) > M\big]\,.$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \big[\forall\, M > 0,\, \exists M' > 0\, /\, x > M' \Longrightarrow f(x) < -M\big]\,.$$

Si no sucede ninguna de las situaciones anteriores, diremos que no existe el límite de f en infinito.

De modo completamente análogo se define el límite de f en $-\infty$ si f está definida en $(-\infty, b)$ para algún $b \in \mathbb{R}$.

Si $y_0 \in \mathbb{R}$ es el límite de f en $\pm\infty$, entonces la recta horizontal $y = y_0$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x = \lim\limits_{x\to-\infty} 1/x = 0$.
3. No existe $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x)$.

2.5 Cálculo de límites.

Las siguientes propiedades son útiles para el cálculo de límites:

1. Sean f y g dos funciones. Supongamos que existen $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$ (x_0 puede ser $\pm\infty$). Entonces:

   (a) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$.

   (b) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$.

   (c) $\lim_{x \to x_0} (f(x)/g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) / \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$, si $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

   (d) $\lim_{x \to x_0} \left(f(x)^{g(x)} \right) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, si $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$.

   Algunas de las propiedades anteriores se pueden extender al caso en que alguno de los límites es $\pm\infty$, teniendo en cuenta las relaciones formales $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\lambda \cdot \infty = \infty$ si $\lambda > 0$, $\lambda \cdot \infty = -\infty$ si $\lambda < 0$, $\infty^\infty = \infty$.

2. Si g es continua y existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ entonces $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)$.

   Por ejemplo, $\lim_{x \to 0} \ln(x+1) = \ln\left(\lim_{x \to 0} (x+1) \right) = \ln(1) = 0$.

3. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ y g está acotada en un entorno de x_0 entonces $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$. Por ejemplo, $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen}(x)/x = 0$, ya que $\operatorname{sen}(x)$ está acotada y $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$.

4. Si f, g, h son tres funciones tales que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ en un entorno de x_0 y $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$ entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$.

5. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.

En muchos caso el cálculo de límites conduce a indeterminaciones. Algunas de ellas se resolverán utilizando la regla de L'Hôpital, que se introduce en el tema siguiente.

2.6 Algunos teoremas para funciones continuas.

En esta sección se recogen cuatro resultados muy útiles basados en la continuidad. Son resultados muy intuitivos que se deducen del siguiente teorema:

Teorema 2.1 *Sea I un intervalo real y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f(I) = \{f(x) \,/\, x \in I\}$ también es un intervalo. Además, si $I = [a, b]$ es un intervalo compacto entonces $f([a, b]) = [c, d]$ también es un intervalo compacto.*

Como consecuencias de este resultado se tienen los siguientes teoremas importantes:

Teorema 2.2 (Teorema de los valores extremos) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.*

Por ejemplo, sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 2x^2$. Se puede probar que

$$\min_{x\in[0,2]} f(x) = f(1) = -1 \quad ; \quad \max_{x\in[0,2]} f(x) = f(2) = 8.$$

Este resultado no tiene por qué ser cierto si f no es continua o no está definida en un intervalo compacto. Por ejemplo, la función $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ es continua pero no existe $\max\limits_{x\in(0,2)} f(x)$ ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$.

Teorema 2.3 (Teorema de los valores intermedios) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sean $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Para cualquier c tal que $m < c < M$ existe al menos un número $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$.*

Teorema 2.4 (Teorema de Bolzano) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua.*
Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe al menos un número $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$.

El teorema de Bolzano es una buena herramienta para probar la existencia de ceros de una función. (Diremos que c es un cero o una raíz de f si $f(c) = 0$.)

Por ejemplo, la función continua $f(x) = e^x - x^4$ tiene un cero en el intervalo $[1,2]$ ya que $f(1) = e - 1 > 0$ y $f(2) = e^2 - 16 < 0$.

Teorema 2.5 (Teorema de punto fijo) *Si $f : [a,b] \to [a,b]$ es una función continua entonces existe al menos un punto fijo de f en $[a,b]$, es decir, $\exists\, x \in [a,b] \,/\, f(x) = x$.*

Obsérvese que para aplicar este teorema es necesario comprobar que f es continua y que $f : [a,b] \to [a,b]$, es decir, $f(x) \in [a,b]$, $\forall\, x \in [a,b]$. Por ejemplo, la función continua $f(x) = e^{x-1}$ tiene un punto fijo en $[0,1]$ ya que $x \in [0,1] \Longrightarrow e^{-1} \le f(x) \le 1 \Longrightarrow f(x) \in [0,1]$.

Capítulo 3

Cálculo diferencial

3.1 Introducción.

El cálculo diferencial, basado en el concepto de derivada de una función en un punto, es la herramienta más eficaz para obtener propiedades de una función como sus intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad. También tiene importantes aplicaciones al cálculo de límites (y por tanto de asíntotas) y a la aproximación de funciones por otras más sencillas.

3.2 Derivada de una función en un punto.

Consideremos una función $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto (acotado o no). Se dice que f es derivable en un punto $x_0 \in I$, si existe el siguiente límite y es finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

En caso de que exista, se llama **derivada de** f **en** x_0 y se denota por $f'(x_0)$. Si el límite no existe o es infinito, diremos que f no es derivable en x_0 o que no existe la derivada de f en x_0.

Una definición equivalente de $f'(x_0)$ se obtiene tomando $h = x - x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ejemplo:

La función $f(x) = x^2$ es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y además

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x.$$

También se pueden definir las derivadas laterales de f en x_0.
Se llama derivada por la izquierda de f en x_0, y se denota $f'(x_0^-)$, al límite

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que éste exista y sea finito.

Análogamente, se define la derivada por la derecha $f'(x_0^+)$ tomando el límite por la derecha.

Propiedad. f es derivable en x_0 si y sólo si existen $f'(x_0^-)$ y $f'(x_0^+)$ y además $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

Ejemplos:

1. La función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x_0 = 0$ ya que

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

2. La función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es derivable en $x_0 = 0$ y $f'(0) = 0$ ya que

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-h) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0.$$

En caso de que una función f esté definida en un intervalo compacto $[a, b]$, la derivada de f en a se define como la derivada por la derecha y la derivada de f en b se entenderá como la derivada por la izquierda.

Interpretación geométrica.

Dados $x_0 \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}$, el cociente $(f(x_0+h) - f(x_0))/h$ representa la pendiente de la recta $y = R_h(x)$ que pasa por los puntos del plano $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Estos puntos están sobre la gráfica de f y las rectas $y = R_h(x)$ se aproximan cuando h tiende a cero a la recta $y = R(x)$ tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Por tanto, una función f es derivable en x_0 si existe la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ y además su pendiente es finita (no es una recta vertical). La derivada de f en x_0 representa la pendiente de dicha recta tangente, cuya ecuación es

$$y = R(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es derivable en $x_0 = 1$ y $f'(1) = 2$. Por tanto, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 1)$ es $y = R(x) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$. Las gráficas de f y R se representan en la figura 3.1.

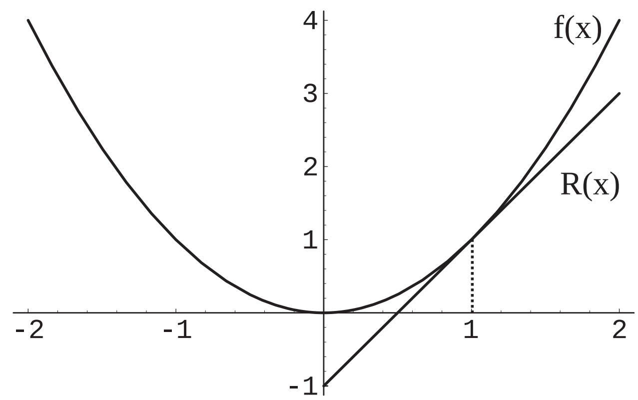

Figura 3.1: Gráfica de $f(x) = x^2$ y su tangente en $(1, 1)$.

3.3 Función derivada. Derivadas sucesivas.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es derivable en I si es derivable en todos los puntos de I. En este caso se puede definir la función derivada de f:

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Si la función f' es a su vez derivable en I entonces se define la derivada segunda (o derivada de orden 2) de f como $f''(x) = (f')'(x)$, $\forall\, x \in I$. En general, si $n \geq 2$, existe la derivada de orden $n-1$ de f y $f^{n-1)}$ es derivable en I entonces se define $f^{n)}(x) = (f^{n-1)})'(x)$, $\forall\, x \in I$. En este caso, se dice que f es n veces derivable en I y $f^{n)}$ se llama derivada n-ésima de f en I.

Por convenio, se define $f^{0)}(x) = f(x)$.

Se dice que una función es de clase n en I y se denota $f \in \mathcal{C}^n(I)$ si f es n veces derivable en I y la función $f^{n)}$ es continua.

Si f tiene derivadas de todos los órdenes entonces se dice que f es de clase infinito y se denota $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Ejemplos:

1. La función $f(x) = e^x$ es de clase infinito en $\mathbb{R}$ ya que existen todas las derivadas sucesivas de f. De hecho, $f^{n)}(x) = e^x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es derivable en $\mathbb{R}$, pero su derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

no es derivable en $x = 0$. Por tanto $f \in C^1(\mathbb{R})$ pero $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Observación. Toda función derivable es continua. Sin embargo, no toda función continua es derivable. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $\mathbb{R}$ pero no es derivable en $x = 0$.

3.4 Propiedades de las derivadas.

Sean $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un punto $x_0 \in I$. Entonces:

1. $(f + g)$ es derivable en x_0 y $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. (λf) es derivable en x_0 y $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(f \cdot g)$ es derivable en x_0 y $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
4. Si $g(x_0) \neq 0$, (f/g) es derivable en x_0 y

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Regla de la cadena.

Se conoce con el nombre de regla de la cadena a la fórmula para la derivada de la composición de dos funciones.

Sean $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ tales que $f(D_1) \subset D_2$. Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$ entonces $(g \circ f)$ es derivable en x_0 y además

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Ejemplo.

La función $f(x) = e^{(x^2)}$ es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = (2x)e^{(x^2)}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3.5 La regla de L'Hôpital.

En esta sección nos saltamos el orden usual por dos razones: la primera es que la regla de L'Hôpital es la aplicación de las derivadas más relacionada con el tema anterior. De hecho es probablemente el método más efectivo para el cálculo de límites en el caso de indeterminaciones. El segundo motivo es que no se incluye la demostración del teorema y eso nos permite dejar el teorema del valor medio para más adelante.

Teorema 3.1 (Regla de L'Hôpital) *Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Sean f y g dos funciones definidas y derivables en los intervalos $(x_0 - r, x_0)$ y $(x_0, x_0 + r)$ para algún $r > 0$, de tal manera que g no se anula en esos intervalos. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ *o* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$

(b) Existe $\lim_{x \to x_0} (f'(x)/g'(x)) = l$ *(l puede ser finito o infinito).*

Entonces existe $\lim_{x \to x_0} (f(x)/g(x))$ *y*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

El resultado del teorema sigue siendo cierto si $x_0 = \pm\infty$ y las funciones f y g son derivables en intervalos de la forma (a, ∞) o $(-\infty, b)$. También se aplica para el cálculo de límites laterales en caso de que f/g sólo esté definida a la izquierda o a la derecha de x_0.

Ejemplo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

Órdenes de crecimiento

Hay muchas funciones que tienen límite infinito en infinito. Sin embargo, también es importante la magnitud del crecimiento. Por ejemplo, es sabido que el crecimiento exponencial es más rápido que el crecimiento logarítmico.

Sean f, g dos funciones tales que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$. La regla de L'Hôpital ayuda a decidir cuál de ellas crece más rápido. Diremos que f y g tienen el mismo orden de crecimiento cuando cuando x tiende a infinito si $\lim_{x \to \infty} (f(x)/g(x)) = c > 0$. Si $\lim_{x \to \infty} (f(x)/g(x)) = \infty$ diremos que el orden de crecimiento de f en infinito es mayor que el de g.

Los siguientes órdenes de crecimiento en infinito están ordenados de mayor a menor:

1. Crecimiento exponencial: f crece exponencialmente cuando x tiende a infinito si existen constantes $a > 0$ y $c > 0$ tales que $\lim_{x \to \infty} (f(x)/e^{ax}) = c$.

2. Crecimiento superlineal: f crece superlinealmente cuando x tiende a infinito si existen constantes $a > 1$ y $c > 0$ tales que $\lim_{x \to \infty} (f(x)/x^a) = c$.

3. Crecimiento lineal: f crece linealmente cuando x tiende a infinito si existe una constante $c > 0$ tal que $\lim_{x \to \infty} (f(x)/x) = c$.

4. Crecimiento sublineal: f crece sublinealmente cuando x tiende a infinito si existen constantes $a \in (0, 1)$ y $c > 0$ tales que $\lim_{x \to \infty} (f(x)/x^a) = c$.

5. Crecimiento logarítmico: f tiene crecimiento logarítmico cuando x tiende a infinito si existe una constante $c > 0$ tal que $\lim_{x \to \infty} (f(x)/\ln(x)) = c$.

Por ejemplo, veamos que el crecimiento sublineal es más rápido que el logarítmico usando la regla de L'Hôpital. En efecto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{\ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^{a-1}}{x^{-1}} = \lim_{x \to \infty} ax^a = \infty, \, \forall \, a > 0.$$

3.6 Extremos relativos de una función.

Las siguientes aplicaciones que veremos del cálculo diferencial se dirigen en primer lugar al estudio cualitativo de las funciones, con especial atención al crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad. Pero, además, los teoremas que se incluyen en esta sección tienen muchas otras aplicaciones.

Empezamos recordando el concepto de máximo y mínimo relativo de una función. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f alcanza un **máximo relativo** en un punto $x_0 \in D$ si existe un número $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todos los puntos $x \in D$ tales que $|x - x_0| < r$.

Análogamente, f alcanza un **mínimo relativo** en un punto $x_0 \in D$ si existe un número $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todos los puntos $x \in D$ tales que $|x - x_0| < r$.

Observaciones:

1. En cualquiera de los dos casos anteriores se dice que f tiene un **extremo relativo** en x_0.
2. El extremo es **estricto** si las desigualdades que relacionan $f(x)$ y $f(x_0)$ son estrictas.
3. El extremo es **absoluto** si las desigualdades $f(x) \leq f(x_0)$ o $f(x) \geq f(x_0)$ se cumplen para todo $x \in D$.

En virtud del teorema de los valores extremos (Teorema 2.2), si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces siempre se alcanzan el máximo y el mínimo absolutos, es decir, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

El siguiente resultado facilita la búsqueda de los extremos relativos de una función.

Teorema 3.2 (Teorema del extremo relativo) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo abierto I. Si f tiene un extremo relativo en un punto $x_0 \in I$ entonces $f'(x_0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $f'(x_0) > 0$. Entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0.$$

En consecuencia, los términos $(f(x) - f(x_0))$ y $(x - x_0)$ tienen el mismo signo en un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ para algún $r > 0$. Por lo tanto, $f(x) > f(x_0)$ si $x > x_0$ y $f(x) < f(x_0)$ si $x < x_0$. Esto quiere decir que f no puede alcanzar un extremo relativo en x_0.

El razonamiento si $f'(x_0) < 0$ es completamente análogo. Por tanto, la única posibilidad para que f tenga un extremo relativo en x_0 es que $f'(x_0) = 0$. □

Observaciones:

1. Este teorema sólo proporciona una condición necesaria para la existencia de extremos. El hecho de que $f'(x_0) = 0$ no garantiza que f tenga un extremo en x_0. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ no tiene ningún extremo relativo y sin embargo $f'(0) = 0$.

2. El teorema sólo se puede aplicar en intervalos abiertos. Si f está definida en un intervalo compacto $[a,b]$, el teorema se puede usar en el intervalo (a,b). En los extremos del intervalo se debe estudiar directamente la posible existencia de extremos. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $[-1,1]$ tiene tres extremos relativos: un mínimo relativo en $x = 0$ y máximos relativos en $x = -1$ y en $x = 1$.

Una de las consecuencias del teorema del extremo relativo es el teorema de Rolle.

Teorema 3.3 (Teorema de Rolle) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Demostración. Si f es constante en $[a,b]$ entonces $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in (a,b)$. En otro caso, el mínimo y el máximo absolutos de f en $[a,b]$ son distintos. Como $f(a) = f(b)$, necesariamente uno de ellos se alcanza en un punto $x_0 \in (a,b)$. El teorema 3.2 garantiza que $f'(x_0) = 0$. □

Como consecuencia del teorema de Rolle se puede relacionar el número de ceros de una función derivable f con el número de ceros de f'.

Corolario 3.1 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable definida en un intervalo real I. Entre dos ceros consecutivos de f existe al menos un cero de f'. En consecuencia, si f' tiene n ceros en I entonces f tiene a lo sumo $(n+1)$ ceros en I.*

Demostración. Sean $c_1 < c_2$ dos ceros consecutivos de f. Entonces $f : [c_1, c_2] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(c_1) = f(c_2)$. Por el teorema de Rolle, existe al menos un punto $x_0 \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(x_0) = 0$. □

Ejemplo. Veamos que la función $f(x) = 2e^x - x - 3$ tiene exactamente una raíz positiva. En efecto,

$$f'(x) = 2e^x - 1 = 0 \Longleftrightarrow e^x = 1/2 \Longleftrightarrow x = \ln(1/2).$$

Como $\ln(1/2) = -\ln(2) < 0$, f' no tiene raíces en $(0,\infty)$ y por tanto f tiene a lo sumo una raíz positiva. Por otra parte, como $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2e - 4 > 0$, el teorema de Bolzano permite afirmar que f tiene un cero en el intervalo $(0,1)$.

3.7 El teorema del valor medio.

Una de las consecuencias principales del teorema de Rolle es el teorema del valor medio.

Teorema 3.4 (Teorema del valor medio) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces existe al menos un punto $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$.*

Demostración. La prueba de este resultado consiste en aplicar el teorema de Rolle a la diferencia entre f y la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. En efecto, sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) \right].$$

Como g es derivable y $g(a) = g(b) = 0$, existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que $g'(x_0) = 0$. Por tanto,

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Longrightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

A continuación se obtienen algunas consecuencias de este resultado. Incluiremos las pruebas de alguno de ellos.

Corolario 3.2 (Derivadas de funciones definidas a trozos) *Sea f una función continua en un punto x_0 y derivable en los intervalos $(x_0 - r, x_0)$ y $(x_0, x_0 + r)$ para algún $r > 0$. Supongamos que existen $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$. Entonces f es derivable en x_0 si y sólo si $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$. Además, en ese caso, $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$ y por tanto f' es continua en x_0.*

Este resultado simplifica el estudio de la derivabilidad en algunos casos. Por ejemplo, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Claramente f es derivable para todo $x \neq 0$ y

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$, se deduce que f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$. Por tanto f' está definida y es continua en $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ahora, como

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es claro que $\lim_{x \to 0^-} f''(x) = -2 \neq \lim_{x \to 0^+} f''(x) = 2$ y por tanto no existe $f''(0)$.

Corolario 3.3 (Intervalos de crecimiento y decrecimiento) *Sea f una función derivable en un intervalo (a, b).*

(a) Si $f'(x) > 0, \forall\, x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente creciente en (a, b).

(b) Si $f'(x) < 0, \forall\, x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente decreciente en (a, b).

Demostración. Probaremos el apartado (a): Sean $x, y \in (a, b)$ tales que $x < y$. Tenemos que demostrar que $f(x) < f(y)$.

Aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[x, y]$ se deduce la existencia de un punto $x_0 \in (x, y)$ tal que $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$. Entonces:

$$f'(x_0) > 0 \Longrightarrow f(y) - f(x) > 0 \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

□

Corolario 3.4 (Determinación de máximos y mínimos relativos) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I. Supongamos que f es dos veces derivable en un entorno de un punto $x_0 \in I$ y $f'(x_0) = 0$.*

(a) Si $f''(x_0) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo estricto en x_0.

(b) Si $f''(x_0) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo estricto en x_0.

Demostración. Como antes, probaremos el primer apartado. Como $f''(x_0) > 0$, la función f'' toma valores positivos en un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ para algún $r > 0$. Por el corolario 3.3, f' es estrictamente creciente en $(x_0 - r, x_0 + r)$. En consecuencia, $f'(x) > f'(x_0) = 0$ si $x > x_0$ y $f'(x) < f'(x_0) = 0$ si $x < x_0$. Por tanto, f es estrictamente decreciente en $(x_0 - r, x_0)$ y estrictamente creciente en (x_0, x_0+r). Esto quiere decir que f tiene en x_0 un mínimo relativo estricto.□

El último de los corolarios que veremos sirve para determinar los intervalos de concavidad y convexidad de la gráfica de una función.

Recordamos estos conceptos. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo I. En este caso se puede definir la recta tangente a la gráfica de f en cada punto $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in I$. Se dice que la función es **convexa** en I si la gráfica de f queda por encima de cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos del intervalo I. Si la gráfica de f queda por debajo de cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos del intervalo I se dirá que f es **cóncava** en I. Si f es convexa a un lado de x_0 y cóncava a otro se dirá que f tiene en x_0 un **punto de inflexión**.

El ejemplo típico de función convexa en $\mathbb{R}$ es $f(x) = x^2$, mientras que el de función cóncava es $f(x) = -x^2$. Ambas se muestran en la figura 3.2.

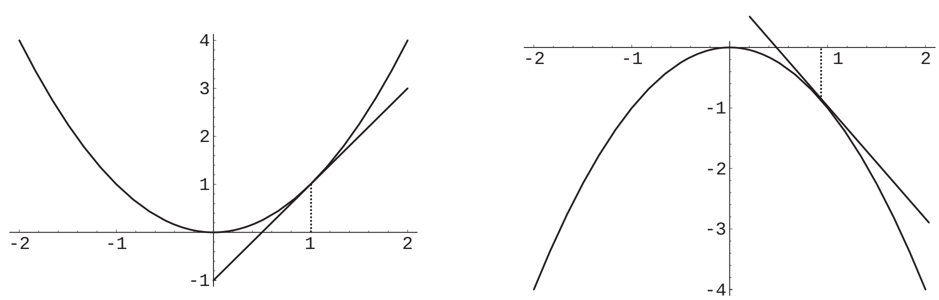

Figura 3.2: Gráficas de x^2 y $-x^2$.

Corolario 3.5 (Concavidad y convexidad) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en un intervalo abierto I.*

(a) Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$ entonces f es convexa en I.

(b) Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$ entonces f es cóncava en I.

(c) Si f tiene en x_0 un punto de inflexión entonces necesariamente $f''(x_0) = 0$.

Demostración. Probemos el apartado (a). Para ello, escogemos un punto $x_0 \in I$; tenemos que demostrar que la gráfica de f queda por encima de la recta tangente a dicha gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$. Recordemos que la ecuación de la recta tangente es $y = r(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Por tanto, debemos probar que

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \, \forall \, x \in I.$$

Como $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, se deduce que f' es estrictamente creciente en I. Distinguimos los casos $x > x_0$ y $x < x_0$.

Por el teorema del valor medio, para cada $x > x_0$ existe un punto $\xi_x \in (x_0, x)$ tal que $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0)$. Como f' es creciente, $f'(\xi_x) > f'(x_0)$ y por tanto:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Longrightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

El caso $x < x_0$ se resuelve de forma completamente análoga. □

3.8 El teorema de Taylor.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo real I. El teorema de Taylor establece la forma de aproximar la función f por un polinomio en un entorno de un punto $x_0 \in I$. El caso más sencillo consiste en aproximar por la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$, es decir, por el polinomio de grado uno $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Obsérvese que p_1 es el único polinomio de grado 1 que satisface las relaciones $p_1(x_0) = f(x_0)$, $p_1'(x_0) = f'(x_0)$.

La recta tangente es una “primera aproximación”de la función f en un entorno del punto x_0. Cabe esperar que podamos mejorar esta aproximación si imponemos condiciones adicionales al polinomio (y por tanto incrementamos su grado).

Para una función n veces derivable en I se define el **polinomio de Taylor** de grado n de f centrado en x_0 al único polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que n que satisface las $n+1$ ecuaciones $p_n(x_0) = f(x_0)$, $p_n'(x_0) = f'(x_0)$, $\ldots$, $p_n^{n)}(x_0) = f^{n)}(x_0)$. Su expresión abreviada es la siguiente:

$$\boxed{p_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.}$$

Es decir,

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Por ejemplo, si $f(x) = e^x$ y $x_0 = 0$, el polinomio de Taylor de grado 3 de f centrado en cero es:

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

ya que $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = e^0 = 1$.

Usando este polinomio, podemos aproximar e^x en puntos próximos a cero. Por ejemplo, $\sqrt{e} = e^{1/2} \approx p_3(1/2) = 1+1/2+1/8+1/48 = 1.64583$. La calculadora proporciona $\sqrt{e} = 1.64872$, con lo que las dos primeras cifras decimales son correctas.

El teorema de Taylor permite estimar el error cometido cuando aproximamos una función por el polinomio de Taylor.

Teorema 3.5 (Teorema de Taylor) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable $n + 1$ veces y sea $x_0 \in [a, b]$. Entonces, para cada $x \in [a, b]$, existe un número ξ_x entre x_0 y x tal que $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$, donde*

$$\boxed{r_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.}$$

El término $r_n(x)$ se llama **resto del polinomio de Taylor** de grado n de f centrado en x_0 y proporciona el error cometido en la aproximación ya que $|f(x) - p_n(x)| = |r_n(x)|$, $\forall\, x \in I$.

Por ejemplo, el polinomio de Taylor de grado tres de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ centrado en $x_0 = 0$ es $p_3(x) = x - x^3/6$. El error cometido al aproximar $\operatorname{sen}(1/2)$ por $p_3(1/2)$ es

$$|r_3(1/2)| = \left| \frac{f^{iv)}(\xi_x)}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right|, \ \xi_x \in (0, 1/2).$$

Dado que $|f^{iv)}(\xi_x)| = |\operatorname{sen}(\xi_x)| \leq 1$, $\forall\, \xi_x \in (0, 1/2)$, se tiene que:

$$|\operatorname{sen}(1/2) - p_3(1/2)| = |r_3(1/2)| \leq \frac{1}{4!\, 2^4} = 0.00260417.$$

De hecho $p_3(1/2) = 1/2 - 1/48 = 0.479167$ y la calculadora proporciona $\operatorname{sen}(1/2) = 0.479426$.

Finalizamos el tema con dos aplicaciones del teorema de Taylor para obtener condiciones precisas para la existencia de extremos relativos y puntos de inflexión de una función f suficientemente regular (con suficientes derivadas sucesivas).

Corolario 3.6 (Criterio para la existencia de extremos) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase n en un intervalo abierto I. Sea $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$ y sea n el orden de la primera derivada de f que no se anula en x_0, es decir $f^{k)}(x_0) = 0$ si $k < n$ y $f^{n)}(x_0) \neq 0$.*

(a) Si n es par y $f^{n)}(x_0) > 0$ entonces f es tiene un mínimo relativo estricto en x_0.

(b) Si n es par y $f^{n)}(x_0) < 0$ entonces f es tiene un máximo relativo estricto en x_0.

(c) Si n es impar entonces f no tiene un extremo relativo en x_0.

Demostración. Demostramos el apartado (a).

El polinomio de Taylor de grado $n-1$ de f centrado en x_0 es

$$p_{n-1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n-1)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0),$$

ya que $f^{k)}(x_0) = 0$ si $k < n$. Por el teorema de Taylor, existe un ξ_x entre x_0 y x tal que

$$f(x) = p_{n-1}(x) + r_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{n)}(\xi_x)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Como n es par y $f^{n)}(x_0) > 0$, se cumple que $(x - x_0)^n > 0$ y $f^{n)}(\xi_x) > 0$ para $x \neq x_0$ en un entorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ de x_0. Por tanto,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{n)}(\xi_x)}{n!}(x - x_0)^n > f(x_0),\ \forall\, x \in (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r).$$

De aquí se deduce que f tiene en x_0 un mínimo relativo estricto. □

Corolario 3.7 (Criterio para la existencia de puntos de inflexión) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase n en un intervalo abierto I. Sea $x_0 \in I$ tal que $f''(x_0) = 0$ y sea n el orden de la primera derivada de f mayor que dos que no se anula en x_0, es decir $f^{k)}(x_0) = 0$ si $2 \leq k < n$ y $f^{n)}(x_0) \neq 0$. Entonces f tiene un punto de inflexión en x_0 si y sólo si n es impar.*

Ejemplo.

Consideremos la función $f(x) = x^4 - x^3$.

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 3/4$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6x = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 1/2.$$

Para $x = 0$ se tiene que $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = -6 \neq 0$. Por tanto, f tiene en $x = 0$ un punto de inflexión.

Para $x = 3/4$ se tiene que $f'(3/4) = 0$, $f''(3/4) = 9/4 > 0$. Por tanto, f tiene en $x = 3/4$ un mínimo relativo estricto.

Para $x = 1/2$ se tiene que $f''(1/2) = 0$, $f'''(1/2) = 6 \neq 0$. Por tanto, f tiene en $x = 1/2$ un punto de inflexión.

La gráfica se muestra en la figura 3.3.

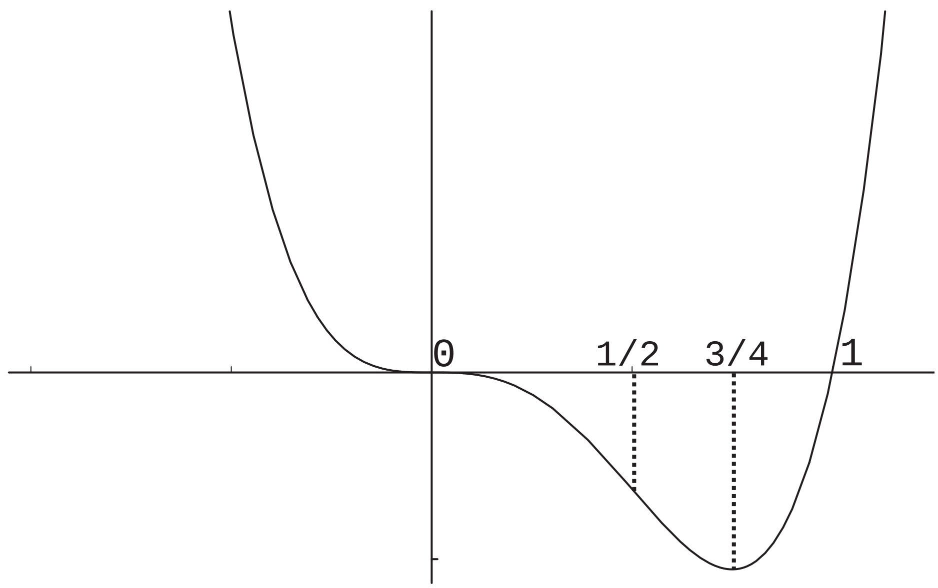

Figura 3.3: Gráfica de la función $f(x) = x^4 - x^3$.

Capítulo 4

Cálculo integral

4.1 Introducción.

Los conceptos más importantes de este capítulo son los de primitiva e integral, íntimamente relacionados gracias al teorema fundamental del cálculo. Aunque clásicamente está ligado al cálculo de áreas, la mayor importancia del cálculo integral viene dada precisamente por su relación con el cálculo de primitivas, el proceso inverso a la derivación. En este tema se introduce el concepto de integral definida para funciones continuas a trozos sin mencionar las sumas de Riemann. Un tratamiento riguroso se puede encontrar en cualquiera de los libros de la bibliografía.

4.2 Primitiva de una función.

El cálculo de primitivas es el proceso inverso al cálculo de derivadas, aunque resulta técnicamente mucho más complicado.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo real I. Se dice que la función $F : I \to \mathbb{R}$ es una **primitiva** de f en I si F es derivable en I y $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$.

Propiedad. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo real I. Si F y G son dos primitivas de f entonces existe una constante real C tal que $F(x) - G(x) = C$. En particular, si conocemos una primitiva de f entonces cualquier otra primitiva se obtiene de ella sumándole una constante.

Si $F(x)$ es una primitiva de f, se suele decir también que F es una integral de f y se denota por $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Integrales inmediatas. Las primitivas de algunas funciones son muy sencillas teniendo en cuenta las derivadas de las funciones más usuales. Por ejemplo,

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x$.

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|)$.
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x)$.
- $\displaystyle\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x)$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int (1+\operatorname{tg}^2(x))dx = \operatorname{tg}(x)$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x)$.

En la mayoría de las ocasiones resulta muy complicado reconocer a simple vista una primitiva. Las siguientes propiedades son de utilidad:

1. Integral de una suma.
Sean u y v dos funciones. Entonces

$$\int (u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx.$$

2. Fórmula de integración por partes.
Sean u y v dos funciones derivables. Entonces

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Esta fórmula es una consecuencia de la fórmula de la derivada de un producto. Si denotamos $u = u(x)$, $du = u'(x)dx$, la fórmula se suele escribir en forma más breve como

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Ejemplo. Calcular $\displaystyle\int xe^x dx$.

Tomando $u = x$, $dv = e^x dx$, se tiene $du = dx$, $v = \displaystyle\int e^x dx = e^x$. Por tanto,

$$\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x.$$

3. Cambio de variable. Si F es una primitiva de f entonces $G(x) = F(u(x))$ es una primitiva de $g(x) = f(u(x))u'(x)$. Esta propiedad se deduce de la regla de la cadena y suele escribir del siguiente modo:

$$\boxed{\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u(x)).}$$

Casos particulares:

- $\displaystyle\int u^n(x)u'(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$.
- $\displaystyle\int e^{u(x)}u'(x)dx = e^{u(x)}$.
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln(|u(x)|)$.

En general, la aplicación de este método no resulta tan directa.

Ejemplo. Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos^3(x)}dx$.

Tomando $u = u(x) = \cos x$, se tiene $du = u'(x)dx = -\operatorname{sen}(x)dx$. Así,

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos^3(x)}dx = \int \frac{-1}{2u^3}du = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{u^3}du = \frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2u^2} = \frac{1}{4u^2} = \frac{1}{4\cos^2(x)}.$$

4.3 La integral definida.

Consideremos una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de tal forma que $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. Se define formalmente la integral definida de f en $[a,b]$ como la medida del área encerrada entre la gráfica de f, el eje de abscisas $y = 0$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Se denota por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Por ejemplo, si $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = 2$, $\forall\, x \in [0,3]$, entonces la integral de f en $[0,3]$ es el área de un rectángulo de base 3 y altura 2. Por tanto, $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx = 2\cdot 3 = 6$.

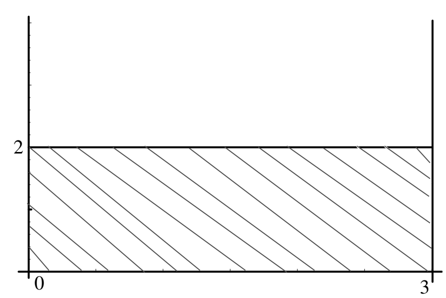

Figura 4.1: Integral de la función $f(x) = 2$ en $[0,3]$.

A continuación definimos la integral definida en el caso general en que f toma valores positivos y negativos en $[a,b]$. En primer lugar se definen la parte positiva f^+ y la parte negativa f^- de f:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \quad ; \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Estas dos funciones toman valores mayores o iguales que cero y se verifica que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Se define

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx.$$

Por tanto, la integral de f en $[a, b]$ representa la diferencia entre el área que encierra la parte de la gráfica de f situada por encima del eje x y la que encierra la parte situada por debajo de éste. Por ejemplo, $\displaystyle\int_0^2 x - 1\, dx = 0$, ya que los dos triángulos de la figura 4.2 tienen la misma área.

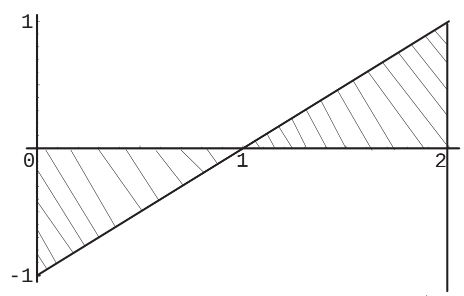

Figura 4.2: Integral de la función $f(x) = x - 1$ en $[0, 2]$.

Propiedades. De esta definición se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

1. Linealidad:
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Monotonía:
$$f(x) \leq g(x),\ \forall\, x \in [a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3. Integral y valor absoluto:
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

4. Aditividad: Si $a < c < b$ entonces
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4.4 El teorema fundamental del cálculo.

El resultado principal de esta sección establece la relación entre la integral definida y el cálculo de primitivas. Empezamos con un resultado previo.

Teorema 4.1 (Teorema de la media integral) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe un punto $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Demostración. Sean

$$m = \min\{f(x) \,/\, x \in [a,b]\} \quad ; \quad M = \max\{f(x) \,/\, x \in [a,b]\}.$$

Teniendo en cuenta que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in [a,b]$, y usando la propiedad de monotonía, se tiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Longrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Recordemos que el teorema 2.3 (de los valores intermedios) garantiza que la función continua f toma todos los valores entre m y M. Por tanto, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

El resultado se obtiene multiplicando por $(b-a)$ la igualdad anterior. □

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se llama **integral indefinida** de f en $[a,b]$ a la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \; \forall\, x \in [a,b].$$

Teorema 4.2 (Teorema fundamental del cálculo) *Si F es la integral indefinida de f en $[a,b]$ entonces $F'(x) = f(x), \forall\, x \in [a,b]$, es decir, F es una primitiva de f en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $x \in [a,b)$. Veamos que $F'(x^+) = f(x)$. En efecto:

$$F'(x^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Por el teorema de la media integral:

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi_h), \; \xi_h \in [x, x+h] \Longrightarrow F'(x^+) = \lim_{h\to 0^+} f(\xi_h) = f(x).$$

Del mismo modo se prueba que $F'(x^-) = f(x)$, $\forall\, x \in (a,b]$. □

Corolario 4.1 (Regla de Barrow) *Si G es una primitiva de f en $[a, b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demostración. Como la integral indefinida es una primitiva de f, existe una constante real C tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Por tanto,

$$G(b) - G(a) = \left(\int_a^b f(x)dx + C\right) - \left(\int_a^a f(x)dx + C\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

La regla de Barrow es una herramienta eficaz para el cálculo de áreas.

Ejemplo. Hallar el área encerrada entre la gráfica de la parábola $y = x^2$ y el eje x entre $x = -1$ y $x = 1$. Como $F(x) = x^3/3$ es una primitiva de $f(x) = x^2$, se tiene:

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 x^2 dx = F(1) - F(-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4.5 Integrales impropias.

Hasta el momento hemos considerado integrales de funciones continuas definidas en un intervalo $[a, b]$. En algunos caso, el concepto de integral se puede extender a funciones definidas en intervalos no acotados.

Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Entonces podemos definir $\int_a^b f(x)dx$ para cada número real $b > a$. Diremos que f es integrable en $[a, \infty)$ si existe el límite cuando b tiende a infinito de esas integrales. Este límite se llama **integral impropia** de f en $[a, \infty)$ y se denota por:

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.}$$

Si el límite es un número real, diremos que la integral impropia es convergente. Si es infinito, diremos que la integral impropia es divergente.

Ejemplo. La integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$.

En efecto, si $\alpha > 1$ entonces

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty} \left(\left.\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^b \right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Si $\alpha < 1$ el mismo argumento prueba que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \infty$, ya que

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \lim_{b\to\infty}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \infty.$$

Finalmente, si $\alpha = 1$ entonces

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\ln(x)]_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}(\ln(b) - \ln(1)) = \infty.$$

El concepto de integral impropia se define de forma análoga para funciones continuas definidas en un intervalo $(-\infty, b]$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.}$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces también se puede definir la integral impropia de f en $\mathbb{R}$ si existen $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ y $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$.

Si ambas son convergentes entonces diremos que la integral impropia de f en $\mathbb{R}$ es convergente. Además:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx.}$$

<u>Ejemplo.</u>

$$\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}(x)]_a^0\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(x)]_0^b\right) =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(b) - \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Resultados de comparación.

Muchas veces resulta difícil calcular la primitiva de una función para determinar si la correspondiente integral impropia es convergente. En algunos casos es posible resolver este problema utilizando resultados de comparación.

Criterio 1. Sean $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y positivas. Entonces:

1. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a,\infty)$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ también converge.

2. Si $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a,\infty)$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ también diverge.

Ejemplo. La integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente ya que $e^{-x^2} \le e^{-x}$, $\forall\, x \in [1,\infty)$ y la integral impropia de e^{-x} en $(1,\infty)$ es convergente:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right]_1^b\Big) = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-1}-e^{-b}\right) = \frac{1}{e}.$$

A diferencia de lo que ocurre con la función e^{-x}, encontrar una primitiva de e^{-x^2} es una tarea muy complicada.

Criterio 2. Sean $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y positivas tales que existe $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$. Entonces:

1. Si $l \in (0,\infty)$ entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge $\iff \displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge.
2. Si $l = 0$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ también converge.
3. Si $l = \infty$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ también diverge.

Ejemplo. La integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+x^3}{1+x^6}dx$ es convergente ya que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ converge y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2+x^3)/(1+x^6)}{1/x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^6}{1+x^6} = 2.$$

Convergencia absoluta.

Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f no es positiva, los criterios anteriores no se pueden aplicar directamente. Sin embargo, sí que se pueden aplicar a la función $|f(x)|$. Teniendo en cuenta que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$, se deduce que si $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|dx$ es convergente entonces también lo es $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ y además

$$\boxed{\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|dx.}$$

Por ejemplo, como

$$\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2} \le \frac{1}{x^2},\ \forall\, x \ge 1$$

y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge, se deduce que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx$ es convergente y además

$$\left|\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx\right| \le \int_1^\infty \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\right| dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Observación. Se dice que la integral impropia $\int_a^\infty f(x)dx$ es **absolutamente convergente** si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ es convergente.

Integrales impropias de segunda especie.

Sea $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y no acotada. Supongamos que existe $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$. Si el límite es finito, diremos que la integral impropia de segunda especie $\int_a^b f(x)dx$ es convergente. Si el límite es infinito, se dice que la integral impropia es divergente.

Del modo análogo se define la integral impropia de f en $[a,b)$ si $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ es una función continua no acotada y existe $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$.

Ejemplos.

1. Sea $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1/x$. Claramente f no está acotada ya que $\lim_{x\to 0^+}(1/x)=\infty$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}(\ln(1)-\ln(c)) = \infty.$$

   Por tanto, la integral impropia $\int_0^1 (1/x)dx$ es divergente.

2. Sea $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x)$. Como antes, f no está acotada ya que $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$.

$$\int_0^1 \ln(x)dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \ln(x)dx = \lim_{c\to 0^+}\left(x(\ln(x)-1)]_c^1\right) = -1-\lim_{c\to 0^+}c(\ln(c)-1) = -1.$$

   Por tanto, la integral impropia $\int_0^1 \ln(x)dx$ es convergente.

   En los cálculos de este ejemplo se ha utilizado el método de integración por partes para calcular una primitiva de $\ln(x)$ y la regla de L'Hôpital para determinar el límite de la expresión $c(\ln(c)-1)$ cuando c tiende a cero por la derecha.

Capítulo 5

Sucesiones

5.1 Introducción.

Hasta el momento hemos visto los temas del análisis en una variable más importantes en la comprensión de fenómenos continuos, como las leyes del movimiento o la ley de enfriamiento. Existen otros procesos en los que las magnitudes involucradas se miden sólo cada cierto tiempo. Se llaman procesos discretos y aparecen en campos muy variados como la economía o la biología, pero además son muy importantes para aproximar fenómenos continuos difíciles de analizar directamente. El concepto más importante en el estudio de fenómenos discretos es el de sucesión. En este tema se introducen algunas propiedades y criterios de convergencia.

5.2 Sucesiones convergentes y divergentes.

Una aplicación $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número natural n un número real $x(n)$ proporciona una **sucesión** de números reales $x(0), x(1), x(2), \ldots$.

En general denotaremos $x_n = x(n)$ para cada número natural n e identificaremos la sucesión con el conjunto $\{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. La denotaremos por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente $\{x_n\}$.

En muchas ocasiones la sucesión $\{x_n\}$ está definida por un término general. Por ejemplo, $x_n = 1/(n+1)$ es el término general de la sucesión $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$.

En otros casos, la sucesión está definida por recurrencia y no es sencillo determinar el término general. Por ejemplo, consideremos la célebre sucesión de Fibonacci construida a partir de $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ por la recurrencia $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Los primeros términos son $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = x_1 + x_0 = 2$, $x_3 = x_2 + x_1 = 3$, $x_4 = x_3 + x_2 = 5$, ...

Límites.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite $x \in \mathbb{R}$ o que converge a x si los términos de la sucesión se aproximan a x cuando n tiende a infinito. Se denota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Formalmente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff [\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.]$$

Si una sucesión tiene límite $x \in \mathbb{R}$ diremos que es **convergente**. Se deduce fácilmente de la definición que si una sucesión de números reales es convergente entonces su límite es único.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite infinito si para todo número real $M > 0$ todos los términos de la sucesión salvo una cantidad finita son mayores que M. Formalmente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \iff [\forall\, M > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \Rightarrow x_n > M.]$$

Análogamente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff [\forall\, M > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \Rightarrow x_n < -M.]$$

Las sucesiones con límite $\pm\infty$ se llaman sucesiones **divergentes**.

Diremos que una sucesión está **acotada** si existen dos números reales a, b tales que $a \leq x_n \leq b, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Es fácil probar que todas las sucesiones convergentes están acotadas y las divergentes no lo están.

<u>Observación.</u> Existen sucesiones que no son convergentes ni divergentes. Por ejemplo,

$$\{\cos(n\pi)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}.$$

5.3 Cálculo de límites.

Empezamos esta sección enunciando algunas propiedades útiles para el cálculo de límites.

1. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda x_n) = \lambda x$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

   (d) Si $y \neq 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n / y_n) = x/y$.

   Las propiedades (a), (b) y (c) se pueden generalizar al caso de sucesiones divergentes, teniendo en cuenta las relaciones formales $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$ y $\lambda \cdot \infty = \infty$ si $\lambda > 0$.

2. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $x \in I$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

   Casos particulares:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n} = e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)} = e^x$.

   (b) Si $x > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(x_n) = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \ln(x)$,

(c) Si $x > 0$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ entonces $\lim_{n\to\infty} (x_n^{y_n}) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)} = x^y$.

3. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que existe $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ (l puede ser $\pm\infty$). Entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = l$.

   Ejemplo: $\lim_{n\to\infty} \ln(n)/n = 0$, ya que, por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x\to\infty} \ln(x)/x = \lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

4. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales. Si $\{x_n\}$ está acotada y $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Por ejemplo, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n)/n = 0$.

5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

6. **Criterio del cociente:** Sea $\{x_n\}$ una sucesión de términos positivos (es suficiente que exista un $N > 0$ tal que $x_n > 0$, $\forall\, n \geq N$). Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$.

   - Si $l < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
   - Si $l > 1$ (puede ser ∞) entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

   Si $l = 1$ el criterio no permite calcular el límite.

   Ejemplo: si $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ \infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

   Si $a \leq -1$ la sucesión $\{a^n\}$ no tiene límite. Finalmente, si $a = 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$.

5.4 Límites superior e inferior.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Se llama **subsucesión** de $\{x_n\}$ a cualquier sucesión obtenida tomando infinitos elementos de $\{x_n\}$ sin alterar su orden.

Por ejemplo, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$, tomando solamente los términos pares se obtiene la subsucesión $\{2^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{1, 2^2, 2^4, \dots\}$.

Se dice que l es un **límite de oscilación** de la sucesión $\{x_n\}$ si es el límite de alguna subsucesión de $\{x_n\}$. Por ejemplo, 1 y -1 son límites de oscilación de la sucesión

$$\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

ya que la sucesión de términos pares $\{2k/(2k+1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 1 y la de términos impares $\{-(2k+1)/(2k+2)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a -1.

Si una sucesión es convergente a x entonces su único límite de oscilación es x.

Se llama **límite superior** de la sucesión $\{x_n\}$ al mayor de sus límites de oscilación y **límite inferior** al menor de ellos. En el ejemplo anterior,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -1 \quad , \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Propiedades: Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

1. $\{x_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = x$.

2. $\{x_n\}$ está acotada superiormente si y sólo si $\limsup_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$, y está acotada inferiormente si y sólo si $\liminf_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$.

5.5 Sucesiones recursivas.

Se llama sucesión recursiva a aquella en la que el término x_n se define en función de los anteriores. Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci es una sucesión de recurrencia en la que cada término se define en función de los dos anteriores.

Las recurrencias más sencillas son aquellas en las que cada término se define en función del anterior a partir de un término inicial $x_0 \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, la sucesión definida a partir de $x_0 = 1$ por la recurrencia $x_{n+1} = (1 - x_n)^2$ proporciona los términos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, ...

La principal dificultad para estudiar la convergencia de estas sucesiones está en que en general no es posible encontrar la expresión del término general x_n en función de n. De hecho, el problema más complicado es probar la existencia de límite, ya que su determinación se reduce al cálculo de puntos fijos, según prueba el siguiente resultado.

Teorema 5.1 *Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida a partir de x_0 por la recurrencia $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ y f es continua entonces $x = f(x)$. Es decir, si la sucesión es convergente entonces su límite es un punto fijo de f.*

Demostración. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ entonces $x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$ y por tanto:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x).$$

□

Hay varios métodos para probar que una sucesión recurrente es convergente. El criterio más sencillo se aplica cuando la función f que define la recurrencia es estrictamente creciente.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ es **creciente** si $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Análogamente, $\{x_n\}$ es **decreciente** si $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente. Para funciones monótonas se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.2 *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

Corolario 5.1 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua estrictamente creciente en (a, b) tal que $f(a), f(b) \in [a, b]$. Entonces:*

1. *f tiene un punto fijo en $[a,b]$.*

2. *Para cada $x_0 \in [a,b]$, la sucesión $\{x_n\}$ definida a partir de x_0 por la recurrencia $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$, es monótona y converge a un punto fijo de f en $[a,b]$. Además, $\{x_n\}$ es creciente si $x_1 > x_0$ y es decreciente si $x_1 < x_0$.*

Ejemplo: Sea $\{x_n\}$ la sucesión definida por:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n e^{1-x_n}, n \geq 0. \end{cases}$$

La función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{1-x}$ satisface:

- $f(0) = 0 \in [0,1]$.
- $f(1) = 1 \in [0,1]$.
- $f'(x) = (1-x)e^{1-x} > 0\,,\ \forall\, x \in (0,1) \Longrightarrow f$ es estrictamente creciente en $(0,1)$.

Por el corolario anterior, la sucesión $\{x_n\}$ es monótona y converge a un punto fijo de f en $[0,1]$. Como $x_1 = f(x_0) = f(1/2) = \sqrt{e}/2 > 1/2 = x_0$, la sucesión es creciente.

Por otra parte, $f(x) = x \iff xe^{1-x} = x \iff x(1-e^{1-x}) = 0 \iff x = 0$ o $x = 1$. Dado que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y los únicos posibles límites son 0 y 1, necesariamente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Capítulo 6

Series

6.1 Introducción.

El concepto de serie está relacionado con un problema muy antiguo de las Matemáticas: ¿es posible que la suma de infinitos términos positivos dé como resultado un número finito? La respuesta es afirmativa y sólo hay que definir correctamente el concepto de "suma infinita". En este capítulo se introducen las definiciones, propiedades básicas y algunos criterios de convergencia de series, con especial atención a las series de potencias.

6.2 Series de números reales.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ una sucesión de números reales. La suma $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ de los n primeros términos se llama suma parcial n-ésima de la sucesión. Se llama **serie** asociada a $\{x_n\}$ a la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

Ejemplo: Si $\{x_n\} = \{1/2^n\} = \{1/2, 1/2^2, 1/2^3, \dots\}$ entonces $s_1 = 1/2$, $s_2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$, $s_3 = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$. En general,

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1/2 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Denotaremos por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a la serie asociada a $\{x_n\}$.

Convergencia.

Diremos que una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es **convergente** si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente, es decir, si existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = s$. Dicho límite se llama suma de la serie y se denota $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

En el ejemplo anterior,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Por tanto la serie es convergente y su suma es 1.

Si $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es **divergente**.

Por ejemplo, la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = 1$, $\forall\, n \geq 1$ proporciona la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ cuya sucesión de sumas parciales es $\{s_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Por tanto $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ es divergente.

Series geométricas. El ejemplo usado antes es una de las pocas series cuya suma se puede calcular fácilmente. En general, si a es un número real, llamaremos serie geométrica de razón a a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Es sencillo probar que dicha serie es convergente si $|a| < 1$ y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}.$$

Observación. El carácter convergente de una serie no varía si prescindimos de una cantidad finita de téminos, pero sí varía la suma en el caso de que sea convergente. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Propiedades:

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ son convergentes entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ también es convergente y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n)$ también es convergente y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente entonces necesariamente $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

   Esta propiedad es útil para concluir que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no puede ser convergente si $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}((n-1)/n)$ no puede ser convergente porque $\lim_{n\to\infty}(n-1)/n = 1 \neq 0$. El hecho de que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ no garantiza que la serie sea convergente. Como veremos a continuación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ es divergente a pesar de que $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

6.3 Series de términos positivos. Criterios de convergencia.

En esta sección consideraremos series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de términos positivos, es decir, $x_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$.

I. Criterio de la integral.

Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

a) f es decreciente.

b) $f(x) > 0$, $\forall\, x > 1$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

Además, en caso de que sean convergentes, se tienen las siguientes desigualdades:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Aplicación: Por comparación con la integral impropia $\int_1^{\infty} (1/x^{\alpha})\, dx$, se deduce del criterio de la integral que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \in (0, 1]$.

Por ejemplo, la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es divergente, mientras que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ es convergente y además, como $\int_1^{\infty} 1/x^2 dx = 1$, se cumplen las desigualdades

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

II. Criterios de comparación.

Como en el caso de las integrales impropias, consideraremos dos tipos de criterios de comparación: uno directo y otro por paso al límite.

<u>Criterio 1.</u> Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq 1$. Entonces:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y además $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2(n)/3^n$ converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

<u>Criterio 2.</u> Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

a) Si $l \in (0, \infty)$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $l = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

c) $l = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Por ejemplo, consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + n}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n - \sqrt{n})/(n^2 + n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n + 1} = 1 > 0,$$

se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + n}$ diverge.

III. Criterio del cociente.

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos. Supongamos que existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Entonces:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, el criterio no decide la convergencia de la serie.

IV. Criterio de la raíz.

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos. Supongamos que existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Entonces:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, el criterio no decide la convergencia de la serie.

6.4 Convergencia absoluta.

Diremos que una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente.

Teniendo en cuenta la desigualdad triangular, se tiene el siguiente resultado:

Propiedad. Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Esta propiedad permite aplicar los criterios de convergencia para series de términos positivos a series arbitrarias. En particular, tenemos la siguiente generalización del criterio del cociente:

Criterio del cociente generalizado.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de números reales. Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$. Entonces:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no converge.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$, el criterio no decide la convergencia de la serie.

Observación: se puede formular un criterio similar usando el criterio de la raíz con $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$.

En algunos casos es posible probar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a pesar de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es divergente.

Criterio de Leibniz.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de términos positivos decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ es convergente.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente ya que la sucesión $\{1/n\}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Sin embargo, la serie no es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que, como hemos visto, es divergente.

6.5 Series de potencias.

Se llama **serie de potencias** con coeficientes $\{a_n\}_{n\geq 0}$ centrada en x_0 a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Las series de potencias se pueden considerar como una generalización de los polinomios ("de grado infinito"). Una serie de potencias define una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ en el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los que es convergente. Este conjunto se llama intervalo de convergencia de la serie y en general es un intervalo centrado en x_0. El siguiente resultado es una consecuencia del criterio del cociente generalizado:

Teorema 6.1 Supongamos que existe $l = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

a) Si l es un número real positivo entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es absolutamente convergente para $x \in (x_0-r, x_0+r)$, donde $r = 1/l$ se llama **radio de convergencia** de la serie. Fuera del intervalo cerrado $[x_0-r, x_0+r]$ la serie es divergente y en los extremos puede ser convergente o divergente.

b) Si $l = \infty$ entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sólo converge para $x = x_0$ (se dice que el radio de convergencia es cero).

c) Si $l = 0$ entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$ (se dice que el radio de convergencia es infinito).

<u>Observación:</u> se puede formular un resultado completamente análogo usando el criterio de la raíz, con $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Derivación e integración de series de potencias.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie de potencias convergente en el intervalo (x_0-r, x_0+r). Entonces se puede definir la función $f : (x_0-r, x_0+r) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Esta función tiene las siguientes propiedades:

1. f es derivable en (x_0-r, x_0+r) y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n(x-x_0)^{n-1}$.

2. f es integrable y además una primitiva de f es

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Ejemplo: Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es convergente para $x \in (-1, 1)$ y además

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}.$$

Si denotamos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, se tiene:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,, \; \forall\, x \in (-1, 1).$$

Series de Taylor.

Sea f una función de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ en un entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de un número real x_0. Entonces se puede calcular el polinomio de Taylor de cualquier orden $k \geq 1$:

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \; \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Si consideramos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, con $a_n = f^{n)}(x_0)/n!$ y r es el radio de convergencia de esta serie entonces se puede definir la función

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \; \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r). \tag{1}$$

Dado que $f(x) = p_k(x) + r_k(x)$, donde

$$r_k(x) = \frac{f^{k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$

con ξ_x entre x_0 y x, si $\lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0$, $\forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} (f(x) - p_k(x)) = \lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0$$

y por tanto

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} p_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \; \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r). \tag{2}$$

Es decir, f es precisamente la función g definida en (1). La expresión (2) se llama **desarrollo en serie de Taylor** de la función f centrado en x_0.

Ejemplo 1: El desarrollo en serie de Taylor de la función e^x centrado en $x_0 = 0$ es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, veamos primero que el radio de convergencia de la serie es infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Longrightarrow r = \infty.$$

Ahora probamos que $\lim\limits_{k\to\infty} r_k(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Como $f^{k)}(x) = e^x$, $\forall\, k \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$|r_k(x)| = \left| \frac{f^{k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!} \right| |x|^{k+1} = \left| \frac{e^{\xi_x}}{(k+1)!} \right| |x|^{k+1} \leq \frac{e^{|x|}|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Usando el criterio del cociente para la convergencia de sucesiones, se prueba que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{|x|}|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_{k\to\infty} |r_k(x)| = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2: El desarrollo en serie de Taylor de la función $\ln(1+x)$ centrado en $x_0 = 0$ es

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \forall\, x \in (-1, 1).$$

En este caso se obtiene directamente usando la fórmula de integración de una serie de potencias.

Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, $\forall\, x \in (-1,1)$, se puede definir la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}, \forall\, x \in (-1, 1).$$

Una primitiva de $f(x) = 1/(1+x)$ es $F(x) = \ln(1+x)$. Por otra parte, usando la expresión anterior:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Como dos primitivas de la misma función se diferencian en una constante, necesariamente existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + C.$$

La constante C se determina evaluando los dos miembros de la igualdad en $x = 0$:

$$0 = \ln(1+0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{n+1}}{n+1} + C = C.$$

Finalmente, tomando $k = n + 1$, se obtiene:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \; \forall\, x \in (-1, 1).$$

Referencias

Agunos libros donde buscar más información, incluidas las demostraciones que faltan

- GERALD L. BRADLEY Y KARL J. SMITH, "Cálculo de una variable, Volumen I", Ed. Prentice Hall, 1998.
- JUAN DE BURGOS, "Cálculo infinitesimal de una variable", Ed. Mc Graw-Hill, 1994.
- SERGE LANG, "Cálculo", Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
- JAMES STEWART, "Cálculo. Conceptos y contextos", 3a. ed., Thompson, 2006.