Introducción al Algebra Lineal

Matrices y Vectores

Darwin Eduardo Martínez Riaño
dmartinezr6@ucentral.edu.co
Camilo Espejo
camilo.espejo@utadeo.edu.co

Maestría en Modelado y Simulación
Universidad Central y Universidad Jorge Tadeo Lozano

Thursday 31st March, 2016

Fundamentos Matemáticos para el Modelado y la Simulación

Agenda

1. Matrices y Vectores
   - Definición de Matrices y Vectores
   - Adición de matrices y multiplicación por escalares
   - Multiplicación de Matrices

Agenda

1. Matrices y Vectores
   - Definición de Matrices y Vectores
   - Adición de matrices y multiplicación por escalares
   - Multiplicación de Matrices
2. Sistemas de ecuaciones lineales
   - Sistemas lineales
   - Eliminación de Gauss
   - Existencia, Unicidad
   - Sistemas lineales homogéneos y no homogéneos

Agenda

Agenda

1. Matrices y Vectores
   - Definición de Matrices y Vectores
   - Adición de matrices y multiplicación por escalares
   - Multiplicación de Matrices
2. Sistemas de ecuaciones lineales
   - Sistemas lineales
   - Eliminación de Gauss
   - Existencia, Unicidad
   - Sistemas lineales homogéneos y no homogéneos
3. Determinantes
   - Determinantes de segundo y tercer orden
   - Determinantes de cualquier orden n
   - Teorema de Cramer
4. Inversa de una matriz
   - Inversa de una Matriz
   - Método de Gauss-Jordan
   - Inversa de una matriz por determinantes

Introducción

El algebra lineal cubre una gran extensión de temas como vectores y matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales, problemas de valores propios entre otros. Es una área de apliación en diferentes disciplinas como física, geometría, economía e ingeniería.

Agenda

1. Matrices y Vectores
   - Definición de Matrices y Vectores
   - Adición de matrices y multiplicación por escalares
   - Multiplicación de Matrices
2. Sistemas de ecuaciones lineales
3. Determinantes
4. Inversa de una matriz

Matrices

Definition

A matrix is a concise and useful way of uniquely representing and working with linear transformations. In particular, every linear transformation can be represented by a matrix, and every matrix corresponds to a unique linear transformation.[a]

[a] http://mathworld.wolfram.com/Matrix.html

$$\begin{array}{llll} 4x_1 & +6x_2 & +9x_3 & = 6 \\ 6x_1 & & -2x_3 & = 20 \\ 5x_1 & -8x_2 & +x_3 & = 10 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 6 & 0 & -2 \\ 5 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 6 \\ 6 & 0 & -2 & 20 \\ 5 & -8 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 5 & -32 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^x & 3x \\ e^{2x} & x^2 \end{bmatrix}$$

Notación Matricial

Las matrices se pueden denotar por medio de:

- Letras mayúsculas en negrita. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\cdots$.

Notación Matricial

Las matrices se pueden denotar por medio de:

- Letras mayúsculas en negrita. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\cdots$.
- Letra con un componente general entre llaves. $\mathbf{A} = [a_{jk}]$

Notación Matricial

Las matrices se pueden denotar por medio de:

- Letras mayúsculas en negrita. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\cdots$.
- Letra con un componente general entre llaves. $\mathbf{A} = [a_{jk}]$
- Dimensiones de la matriz. **matriz de** $m \times n$

Notación Matricial

Las matrices se pueden denotar por medio de:

- Letras mayúsculas en negrita. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\cdots$.
- Letra con un componente general entre llaves. $\mathbf{A} = [a_{jk}]$
- Dimensiones de la matriz. **matriz de** $m \times n$
- sus componentes

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En la notación de doble subindice ej. a_{jk},el primer subindice denota siempre la fila y el segundo subindice la columna del elemento, así a_{23} denota al elemento que se encuentra en la fila 2 y la columna 3 de la matriz

Vectores

Un vector es una matriz $\mathbf{A}$ de $m \times n$ donde $m = 1$ ó $n = 1$. Tiene una sola fila (vector fila) o una sola columna (vector columna), en ambos casos a sus elementos se le llama *componentes*.

Los vectores se pueden denotar por medio de:

- Letra en minúsculas y negrita. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\cdots$

Vectores

Un vector es una matriz $\mathbf{A}$ de $m \times n$ donde $m = 1$ ó $n = 1$. Tiene una sola fila (vector fila) o una sola columna (vector columna), en ambos casos a sus elementos se le llama *componentes*.

Los vectores se pueden denotar por medio de:

- Letra en minúsculas y negrita. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\cdots$
- Letra con un componente general entre llaves. $\mathbf{a} = [a_j]$

Vectores

Un vector es una matriz $\mathbf{A}$ de $m \times n$ donde $m = 1$ ó $n = 1$. Tiene una sola fila (vector fila) o una sola columna (vector columna), en ambos casos a sus elementos se le llama *componentes*.

Los vectores se pueden denotar por medio de:

- Letra en minúsculas y negrita. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\cdots$
- Letra con un componente general entre llaves. $\mathbf{a} = [a_j]$
- Sus componentes.

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_m], \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Igualdad de Matrices

Igualdad de matrices

Dos matrices $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ y $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ son **iguales**, si y solo si tienen el mismo tamaño y sus componentes correspondientes son iguales, es decir, $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$ y así sucesivamente.

$$\text{Sean} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{si y solo si} \quad \begin{matrix} a_{11} = 4, & a_{12} = 0, \\ a_{21} = 3, & a_{22} = -1, \end{matrix}$$

Adición de matrices

Adición de matrices

La suma de dos matrices $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ y $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ del mismo tamaño, se denota como $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y sus componentes se obtienen sumando los componentes correspondientes de cada matriz, $a_{jk} + b_{jk}$.

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicación por escalares

Multiplicación por escalares

El producto de cualquier matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$ por cualquier escalar c (número c) se denota como $c\mathbf{A}$ y es la matriz de $m \times n c\mathbf{A} = [ca_{jk}]$ que se obtiene multiplicando cada componente de $\mathbf{A}$ por c

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.7 & -1.8 \\ 0 & 0.9 \\ 9.0 & -4.5 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces}$$

$$(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.7 & 1.8 \\ 0 & -0.9 \\ -9.0 & 4.5 \end{bmatrix}, \quad \frac{10}{9}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}, \quad 0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Reglas para la adición y Multiplicación por un escalar

Adición

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{1}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \tag{2}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A} \tag{3}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \tag{4}$$

Multiplicación

$$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \tag{5}$$

$$(c + k)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + k\mathbf{A} \tag{6}$$

$$c(k\mathbf{A}) = (ck)\mathbf{A} \tag{7}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{8}$$

Donde $\mathbf{0}$ denota la **matriz cero** de $m \times n$, que es una matriz $m \times n$ cuyos componentes son cero.

Multiplicación de una matriz por una matriz

Definición

El producto $\mathbf{C} = [c_{jk}] = \mathbf{AB}$ de $m \times p$, es el resultado de multiplicar una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$ por una matriz $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ de $r \times p$, si y solo si $r = n$.

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk} \qquad \begin{array}{l} j = 1, \cdots, m \\ k = 1, \cdots, p \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ [m \times n] & [n \times p] & = & [m \times p] \end{array}$$

Multiplicación de una matriz por una matriz

$$m = 4\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}^{n=3} \overbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}}^{p=2} = \overbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}}^{p=2}\right\} m = 4$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -2 & 43 & 42 \\ 26 & -16 & \boxed{14} & 6 \\ -9 & 4 & -37 & -28 \end{bmatrix}$$

Donde $c_{23} = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 14$

Multiplicación de una matriz por una matriz

$$\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\6 & 12 & 2\\12 & 24 & 4\end{bmatrix}$$

La multplicación entre matrices no es commutativa

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\100 & 100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\100 & 100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}99 & 99\\-99 & -99\end{bmatrix}$$

Además $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \nrightarrow \mathbf{BA} = \mathbf{0} \ \vee \ \mathbf{A} = \mathbf{0} \ \vee \ \mathbf{B} = \mathbf{0}$

Multiplicación de una matriz por una matriz

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}k\mathbf{B} \tag{9}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \tag{10}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \tag{11}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB} \tag{12}$$

$$c_{jk} = \mathbf{a}_j\mathbf{b}_k \quad j = 1, \cdots, m; \quad k = 1, \cdots, p$$

$$\mathbf{a}_j\mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}$$

Multiplicación de una matriz por una matriz

Transformaciones Lineales

Para $n = 2$ las transformaciones lineales son de la forma:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una matriz

Transposición de una matriz

La transpuesta de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$, es la matriz $\mathbf{A}^T$ de $n \times n$, donde la primera fila de $\mathbf{A}$ es la primera columna de $\mathbf{A}^T$, la segunda fila de $\mathbf{A}$ es la segunda columna de $\mathbf{A}^T$, y así sucesivamente. Entonces la tranpuesta de $\mathbf{A}$ es $\mathbf{A}^T = [a_{kj}]$

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \mathbf{A}^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una matriz

Reglas de transposición

Transposition rules

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T \tag{13}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \tag{14}$$

$$(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T \tag{15}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{16}$$

Matrices especiales

Simétrica y antisimétrica

Simétrica: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}, (a_{jk} = a_{kj})$.
Antisimétrica: $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}, (a_{jk} = -a_{kj} \wedge a_{jj} = 0)$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 120 & 200 \\ 120 & 10 & 150 \\ 200 & 150 & 30 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices triangulares

Matrices triangulares superiores

Son matrices cuadradas que tienen componentes diferentes de cero solo en y arriba de la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrices triangulares inferiores

Son matrices cuadradas que tienen componentes diferentes de cero solo en y bajo la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrices diagonales

Son matrices cuadradas que tienen componentes diferentes de cero solo en la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Agenda

1. Matrices y Vectores
2. Sistemas de ecuaciones lineales
   - Sistemas lineales
   - Eliminación de Gauss
   - Existencia, Unicidad
   - Sistemas lineales homogéneos y no homogéneos
3. Determinantes
4. Inversa de una matriz

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema lineal de m de ecuaciones en n incógnitas

Es un conjunto de ecuaciones $x_1, \cdots, x_n$ de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \quad + \quad \cdots \quad + \quad \cdots \quad &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Los sistemas lineales modelan muchas aplicaciones en ingeniería, economía, estadística y muchas otras áreas.

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema lineal de m de ecuaciones en n incógnitas

Es un conjunto de ecuaciones $x_1, \cdots, x_n$ de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \quad + \quad \cdots \quad + \quad \cdots \quad &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Coeficientes

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema lineal de m de ecuaciones en n incógnitas

Es un conjunto de ecuaciones $x_1, \cdots, x_n$ de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots \quad + \quad \cdots \quad + \quad \cdots \quad &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Sistema homogéneo si todos los valores $b_j = 0$

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema lineal de m de ecuaciones en n incógnitas

Es un conjunto de ecuaciones $x_1, \cdots, x_n$ de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \quad + \quad \cdots \quad + \quad \cdots \quad &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Una solución es un conjunto de números $x_1, \cdots, x_n$ que satisface las m ecuaciones. El vector $\mathbf{x}$ cuyos componentes son una solución, se denota como vector solución

Sistemas de ecuaciones lineales

Forma matricial de un sistema lineal - Matriz aumentada

Forma matricial de un sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Donde **A** es la matriz de coeficientes, y **x** y **b** son vectores columna.

Matriz aumentada

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

La matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$ determina completamente el sistema lineal.

Sistemas de ecuaciones lineales
Interpretación geométrica

Si $m = n = 2$ se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas x_1, x_2

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Interpretación geométrica

Si x_1, x_2 se interpretan como coordenadas en el plano entonces cada ecuación representa una recta $y(x1, x2)$ y es una solución si y solo si el punto $P = (x_1, x_2)$ está en ambas rectas.

(a) Hay una sola solución si se intersectan
(b) Hay infinidad de soluciones si coinciden
(c) No hay ninguna solución si son paralelas

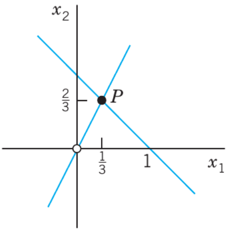
Sistemas de ecuaciones lineales

Interpretación geométrica-Existencia de soluciones

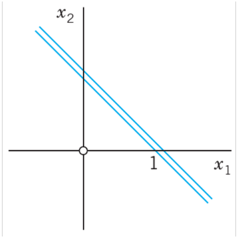
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

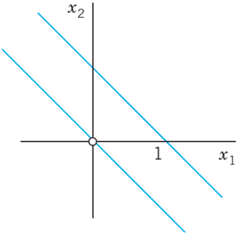
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$



caso a



caso b



caso c

Eliminación de Gauss
Forma triangular y sustitución hacia atrás

Considere un sistema lineal representado por la matriz triangular superior.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 13x_2 &= -26 \end{aligned}$$

Sustitución hacia atrás

- ⋆ Solucionar la última ecuación.
- ⋆ Sustituir hacia atrás.

$$x_2 = \frac{-26}{13} = -2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(2 - 5x_2) \\ &= \frac{1}{2}(2 - 5(-2)) \\ &= 6 \end{aligned}$$

1. Reducir un sistema lineal a su forma triangular.
2. Solucionar la última ecuación y sustituir hacia atrás.

Eliminación de Gauss

Método de Gauss

Operaciones elementales sobre filas

Operaciones en Matrices

* Intercambio de dos filas.

Operaciones en ecuaciones

* Intercambio de dos ecuaciones.

Un sistema lineal $\mathcal{S}_1$ es equivalente respecto a los renglones a un sistema lineal $\mathcal{S}_2$ si: $\mathcal{S}_1$ puede obtenerse a partir de $\mathcal{S}_2$ por un número finito de operaciones elementales sobre filas.

El método de Gauss permite transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente que sea de forma trinagular superior.

Eliminación de Gauss

Método de Gauss

Operaciones elementales sobre filas

Operaciones en Matrices

- ⋆ Intercambio de dos filas.
- ⋆ Adición de un múltiplo constante de una fila a otra fila

Operaciones en ecuaciones

- ⋆ Intercambio de dos ecuaciones.
- ⋆ Adición de un múltiplo constante de una ecuación a otra ecuación

Un sistema lineal $\mathcal{S}_1$ es equivalente respecto a los renglones a un sistema lineal $\mathcal{S}_2$ si: $\mathcal{S}_1$ puede obtenerse a partir de $\mathcal{S}_2$ por un número finito de operaciones elementales sobre filas.

El método de Gauss permite transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente que sea de forma trinagular superior.

Eliminación de Gauss

Método de Gauss

Operaciones elementales sobre filas

Operaciones en Matrices

- ⋆ Intercambio de dos filas.
- ⋆ Adición de un múltiplo constante de una fila a otra fila
- ⋆ Multiplicación de una fila por una constante diferente de cero

Operaciones en ecuaciones

- ⋆ Intercambio de dos ecuaciones.
- ⋆ Adición de un múltiplo constante de una ecuación a otra ecuación
- ⋆ Multiplicación de una ecuación por una constante diferente de cero

Un sistema lineal $\mathcal{S}_1$ es equivalente respecto a los renglones a un sistema lineal $\mathcal{S}_2$ si: $\mathcal{S}_1$ puede obtenerse a partir de $\mathcal{S}_2$ por un número finito de operaciones elementales sobre filas.

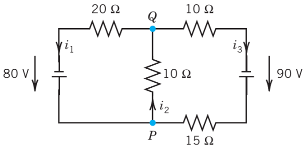
El método de Gauss permite transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente que sea de forma trinagular superior.

Eliminación de Gauss

Método de Gauss

Ejemplo: Red eléctrica

Sistema para las corrientes desconocidas $x_1 = i_1,\ x_2 = i_2,\ x_3 = i_3$ en la red eléctrica.



$$\begin{array}{lrrrr}
\text{Nodo } P: & i_1 & -i_2 & +i_3 & =0\\
\text{Nodo } Q: & -i_1 & +i_2 & -i_3 & =0\\
\text{Nudo derecho}: & & +10i_2 & +25i_3 & =90\\
\text{Nudo Izquierdo}: & 20i_1 & +10i_2 & + & =80
\end{array}$$

Ley de corrientes de Kirchhoff En cualquier punto del circuito, la suma de las corrientes que entran es igual a la suma de corrientes que salen.

Ley de tensiones de Kirchhoff En cualquier circuito cerrado, la suma de todas las caidas de voltaje es igual a la fuerza electromotriz aplicada.

Eliminación de Gauss
Método de Gauss

Ejemplo: Red eléctrica

Ecuaciones — Matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\begin{array}{l} \text{Pivote} \longrightarrow \\ \\ \text{Se eliminan} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & +-x_3 & = 0 \\ & 10x_2 & +25x_3 & = 90 \\ 20x_1 & 10x_2 & & = 80 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{array}\right]$$

Eliminación de x_1 llame a la primera ecuación de **A** la ecuación pivote y, su término x_1 el pivote en este paso. Esta equación se usa para eliminar x_1 de las otras ecuaciones.

1. Restar -1 veces la ecuación pivote de la segunda ecuación.
2. Restar 20 veces la ecuación pivote de la cuarta ecuación.

Eliminación de Gauss
Método de Gauss

Ejemplo: Red eléctrica

Ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & +x_3 & =0 \\ & & 0 & =0 \\ & 10x_2 & +25x_3 & =90 \\ & 30x_2 & -20x_3 & =80 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \end{array}\right]$$

Intercambio de las filas 2 y 3, y después las filas 3 y 4

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & +x_3 & =0 \\ & 10x_2 & +25x_3 & =90 \\ & 30x_2 & -20x_3 & =80 \\ & & 0 & =0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss
Método de Gauss

Ejemplo: Red eléctrica

Ecuaciones

Pivote $\longrightarrow$
Se eliminan $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & +x_3 & =0 \\ & 10x_2 & +25x_3 & =90 \\ & 30x_2 & -20x_3 & =80 \\ & & 0 & =0 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eliminación de x_2 :

1. Restar -3 veces la ecuación pivote de la tercera ecuación.

Ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & +x_3 & =0 \\ & 10x_2 & +25x_3 & =90 \\ & & -95x_3 & =-190 \\ & & 0 & =0 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss
Método de Gauss

Ejemplo: Red eléctrica

Sustitución hacia atrás

$$\begin{array}{rrrcr} & & -95x_3 & = & -190 \\ & 10x_2 & +25x_3 & = & 90 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-190}{-95} &&= 2 \\ x_2 = \frac{1}{10}(90-25x_3) &= \frac{1}{10}(90-50) &&= 4 \\ x_1 = x_2 - x_3 &= 4-2 &&= 2 \end{aligned}$$

Eliminación de Gauss

Tres posibles casos de sistemas

Subdeterminado Tiene menos ecuaciones que incógnitas.

Determinado Si el número de incógnitas y ecuaciones es el mismo.

Sobredeterminado Tiene mas ecuaciones que incógnitas.

Es posible aplicar la solución de Gauss sin importar si el sistema tiene varias soluciones, única solución o ninguna.

Eliminación de Gauss

Tres posibles casos de sistemas

Subdeterminado - Existen infinitas soluciones

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \color{red}{Fila2 - 0.2Fila1} \\ \color{red}{Fila3 - 0.4Fila1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0.0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & -1.1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \color{red}{Fila3 + Fila2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{array}\right]$$

Sustitución hacia atrás:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - x_3 + 4x_4 \\ x_1 &= 2 - x_4 \end{aligned}$$

Eliminación de Gauss

Tres posibles casos de sistemas

Determinado - Única solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \color{red}{Fila2 + 3Fila1} \\ \color{red}{Fila3 - Fila1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \color{red}{Fila3 - Fila2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$$

Sustitución hacia atrás:

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= (12 - 7x_3)/2 = -1 \\ x_1 &= (2x_3 + x_2 - 2) = 1 \end{aligned}$$

Eliminación de Gauss

Tres posibles casos de sistemas

Ninguna solución - El sistema lineal muestra una contradicción

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 6 & 2 & 4 & | & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \color{red}{Fila2 - \frac{2}{3}Fila1} \\ \color{red}{Fila3 - 2Fila1} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & -2 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \color{red}{Fila3 - 6Fila2} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -12 \end{bmatrix}$$

En este caso la última fila de la matriz aumentada muestra la contradicción $0 = 12$

Existencia, Unicidad

Submatriz de **A**

Cualquier matriz obtenida a partir de **A** al omitir algunas filas o columnas o ambas.

Independencia lineal

Un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de ellos puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores restantes.

Rango de **A**

Es el máximo número de vectores fila de **A** que son linealmente independientes.

Existencia, Unicidad

Teorema fundamental de los sistemas lineales

Sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Existencia

Un sistema tiene soluciones si y solo si la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ y la matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$ tienen el mismo rango.

Unicidad

Un sistema tiene única solución si el rango r de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ y la matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$ es igual a n.

Existencia, Unicidad

Teorema fundamental de los sistemas lineales

Sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Infinitas soluciones

Un sistema tiene infinitas soluciones si el rango r es menor que n. La totalidad de las cuales se obtiene al determinar r incógnitas adecuadas.

Eliminación de Gauss

Si existen soluciones todas pueden obtenerse por eliminación de Gauss.

Existencia, Unicidad

Teorema fundamental de los sistemas lineales - Prueba

- ⋆ Se puede escribir el sistema de ecuaciones en forma de vectores $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ o en términos de vectores columnas $\mathbf{c}_{(1)}, \cdots, \mathbf{c}_{(n)}$ de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \mathbf{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{b}$$

- ⋆ La matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$ se obtine aumentando $\mathbf{A}$ con la columna $\mathbf{b}$. EL rango de $\tilde{\mathbf{A}}$ es igual al rango de $\mathbf{A}$.
- ⋆ Si el sistema tiene una solución $\mathbf{x}$, entonces el sistema muestra que $\mathbf{b}$ debe ser una combinación lineal de esos vectores columna $\mathbf{c}_{(1)}, \cdots, \mathbf{c}_{(n)}$
- ⋆ Entonces $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A}$ tienen el mismo número de vectores columna linealmente independientes y por lo tanto el mismo rango.
- ⋆ Si el rango de $\mathbf{A} =$ rango $\tilde{\mathbf{A}}$, entonces $\mathbf{b}$ debe ser una combinación lineal de los vectores de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{c}_{(1)} + \alpha_2\mathbf{c}_{(2)} + \cdots + \alpha_1\mathbf{c}_{(n)}$$

Existencia, Unicidad

Teorema fundamental de los sistemas lineales - Prueba

- Si el rango de $\mathbf{A} = n$, los n vectores columna $\mathbf{c}_{(1)}, \cdots, \mathbf{c}_{(n)}$ son linealmente independientes.
- La representación de $\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \mathbf{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{b}$ es única de lo contrario

$$\mathbf{c}_{(1)}\tilde{x}_1 + \mathbf{c}_{(2)}\tilde{x}_2 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}\tilde{x}_n = \mathbf{b}$$

- lo cual implica que

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \mathbf{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{c}_{(1)}\tilde{x}_1 + \mathbf{c}_{(2)}\tilde{x}_2 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}\tilde{x}_n$$
$$\mathbf{c}_{(1)}(x_1 - \tilde{x}_1) + \mathbf{c}_{(2)}(x_2 - \tilde{x}_2) + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}(x_n - \tilde{x}_n) = 0$$

- Entonces $x_1 - \tilde{x}_1 = 0, \cdots, x_n - \tilde{x}_n = 0$ por independencia lineal. Por lo tanto los escalares $x_1, \cdots, x_n$ son la única solución.

Existencia, Unicidad

Teorema fundamental de los sistemas lineales - Prueba

- Si el rango de $\mathbf{A} =$ rango $de\tilde{\mathbf{A}} = r < n$, Existe un subconjunto K de r vectores columna de $\mathbf{A}$ independientes.
- Existen $n - r$ vectores columna de $\mathbf{A}$ que son combinaciones lineales de los vectores en k
- Se renumeran los vetores columna tal que $K = \{\tilde{\mathbf{c}}_{(1)}, \tilde{\mathbf{c}}_{(2)}, \cdots, \tilde{\mathbf{c}}_{(r)}\}$
- Se reescribe la ecuación en términos de los vectores columna renumerados

$$\tilde{\mathbf{c}}_{(1)}\tilde{x}_1 + \cdots + \tilde{\mathbf{c}}_{(r)}\tilde{x}_r + \tilde{\mathbf{c}}_{(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \cdots + \tilde{\mathbf{c}}_{(n)}\tilde{x}_n = \mathbf{b}$$

- Los vectores $\tilde{\mathbf{c}}_{(r+1)}, \cdots, \tilde{\mathbf{c}}_{(n)}$ son combinaciones lineales de K así como los vectores $\tilde{\mathbf{c}}_{(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \cdots + \tilde{\mathbf{c}}_{(n)}\tilde{x}_n$
- expresando y agrupando estos vectores en terminos de los vectores en K

$$\tilde{\mathbf{c}}_{(1)}y_1 + \cdots + \tilde{\mathbf{c}}_{(r)}y_r = \mathbf{b}$$

Existencia, Unicidad

Teorema fundamental de los sistemas lineales - Prueba

$$\tilde{\mathbf{c}}_{(1)}y_1 + \cdots + \tilde{\mathbf{c}}_{(r)}y_r = \mathbf{b}$$

⋆ $y_j = \tilde{x}_j + \beta_j$ donde β_j resulta de los restantes $n - r$ términos restantes $\tilde{\mathbf{c}}_{(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \cdots + \tilde{\mathbf{c}}_{(n)}\tilde{x}_n$. El sistema tiene única solución para los $\tilde{x}_j : j = 1 \cdots r$ y se pueden escoger los valores para $\tilde{x}_{(r+1)} + \cdots + \tilde{x}_n$ por lo cual el sistema tiene infinitas soluciones.

Sistemas Homogéneos

Sistemas lineales homogéneos

Un sistema lineal homogéneo

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots+a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = 0 & \\ \vdots & +\vdots+\ddots+\vdots=\vdots & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n = 0 & \end{bmatrix}$$

siempre tiene solución trivial $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$
Soluciones no triviales existen si y solo si el rango de $\mathbf{A} < n$.
Si el rango de $\mathbf{A} = r < n$, estas soluciones, junto con $\mathbf{x} = 0$ forman un espacio vectorial de dimensión $n - r$ llamado **espacio de solución**.

Un sistema lineal homogeneo con menos ecuaciones que incognitas siempre tiene soluciones no triviales

Sistemas No Homogéneos

Sistemas lineales no homogéneos

Si un sistema lineal no homogéneo tiene soluciones, todas sus soluciones son obtenidas como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h$$

Donde $\mathbf{x}0$ es cualquier solución fija del sistema lineal y $\mathbf{x}_h$ recorre todas las soluciones del sistema homogéneo correspondiente.

Agenda

Determinantes de segundo orden

Determinante de Segundo Orden

Un determinante de segundo orden se denota y define por

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Regla de Cramer: Solución sistemas lineales de 2 ecuaciones y 2 incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$x_1 = D_1/D$ y $x_2 = D_2/D$

Siempre que $D \neq 0$

$$D_1 = b_1a_{22} + a_{12}b_2 \qquad D_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

Determinantes de tercer orden

Determinante de Tercer Orden

Un determinante de tercer orden puede definirse por

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D = {} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \\ & + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \\ & + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

Determinantes de tercer orden

Regla de Cramer

Para sistemas lineales de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & = b_3 \end{array}$$

$$x_1 = D_1/D \qquad x_2 = D_2/D \qquad x_3 = D_3/D$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Determinantes de cualquier orden n

Un determinante de orden n es un escalar asociado con la matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ la cual se escribe

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

para $n = 1$ el determinante esta definido por

$$D = a_{11}$$

Determinantes de cualquier orden n

para $n \geq 2$ esta definida por

$$D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

o por

$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

donde

$$C_{jk} = (-1)^{j+k}\mathrm{M}_{jk}$$

$$D = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}\mathrm{M}_{jk} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$
$$D = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}\mathrm{M}_{jk} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

C_{jk} es el **cofactor** de a_{jk} en D y M_{jk} es el determinante de orden $n-1$ de la submatriz de **A** eliminando la fila y la columna del componente a_{jk}, también llamado **Menor** de a_{jk} en D.

De esta manera D esta definida en términos de n determinantes de orden $n-1$, cada uno de los cuales esta definido por $n-1$ determinantes de orden $n-2$ y así sucesivamente.

Determinantes de cualquier orden n

Propiedades

Teorema 1. Comportamiento de un determinante de orden n bajo operaciones elementales de filas

(a) El intercambio de dos filas multiplica el valor del determinante por -1.

(b) La adición de un multiplo de una fila aotra fila no altera el valor del determinante.

(c) La multiplicación de una fila por una constante diferente de cero c, multiplica el valor del determinante por c.

Determinantes de cualquier orden n

Propiedades

$$\text{Para } n=2,\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc,\ \text{pero } \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc-ad.$$

Sea D un determinante de orden $n : n-1 \geq 2$. Sea E el determinante obtenido luego de intercambiar dos filas. Desarrollar D y E por una fila que no sea uno de los que se han intercambiado, llamada $j-esimo$ fila.

$$D=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}\mathrm{M}_{jk}, \quad E=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}\mathrm{N}_{jk}$$

Donde N_{jk} es obtenido a partir del menor M_{jk} de a_{jk} en D por el intercambio de dos filas. Estos menores son de orden $n-1$ y por la hipótesis de inducción es válida y de ella se obtiene que $N_{jk}=-M_{jk}$ en consecuencia $D=-E$

Determinantes de cualquier orden n

Propiedades

Adicionar c veces la fila i a la fila j.
Sea $\tilde{D}$ un nuevo determinante, cuyas componentes en filas j son $a_{jk} + ca_{ik}$. Si se desarrolla $\tilde{D}$ por su fila j, se observa que se puede escribir como $\tilde{D} = D_1 + cD_2$ donde $D_1 = D$ en la fila j de a_{jk} y D_2 tiene en esa fila j de a_{jk} la adición, así pues, D_2 tiene a_{jk} en la fila i y en la fila j. Intercambiando las dos filas i y j se tiene que $D_2 = -D_2$ lo que indica que $D_2 = 0$, y así $\tilde{D} = D$.

Determinantes de cualquier orden n

Propiedades

Sea $\tilde{D}$ un nuevo determinante cuya fila j es $c(a_{jk})$. Entonces al desarrollar el determinate por la fila j se obtiene:

$$\begin{aligned}\tilde{D} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}ca_{jk}\mathrm{M}_{jk}\\ &= c\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}\mathrm{M}_{jk}\\ &= cD\end{aligned}$$

Determinantes de cualquier orden n

Propiedades

Teorema 2. Propiedades adicionales de determinantes de orden n

(a) El teorema 1 aplica también para columnas.

(b) La transposición no altera el valor del determinante.

(c) Un determinante con una fila o columna cero tiene un valor de cero.

(d) El valor de un determinante que tiene filas o columans proporcionales es cero.

Determinantes de cualquier orden n

Propiedades

Si la fila j es c veces la fila i, entonces

- $D = cD_1$, donde D_1 tiene la fila j igual a la fila i
- intercambiando la fila i por la fila j en D_1 resulta $D_1 = -D_1$
- Por el teorema 1 $D_1 = 0$ entonces $D = cD_1 = 0$

Teorema de Cramer

Rango de una matriz en términos de determinantes

Rango de una matriz en términos de determinantes

Considere una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$

1. $\mathbf{A}$ tiene rango $r \geq 1$ si y solo si $\mathbf{A}$ tiene una submatriz de $r \times r$ con determinante diferente de cero.
2. El determinante de cualquier submatriz cuadrada con mas de r filas contenida en $\mathbf{A}$ tiene valor igual a cero.
3. una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene rango ygual a n si y solo si
$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

Teorema de Cramer

Rango de una matriz en términos de determinantes

- Sea $\hat{\mathbf{A}}$ la forma escalonada de $\mathbf{A}$.
- $\hat{\mathbf{A}}$ tiene r vectores fila diferentes de cero si y solo si el rango de $\mathbf{A} = r$
- Sea $\hat{\mathbf{R}}$ la submatriz de $r \times r$ de $\hat{\mathbf{A}}$ que consta de r^2 componentes que se encuentran en las primeras r filas y columnas de $\hat{\mathbf{A}}$.
- $\hat{\mathbf{R}}$ es triangular y tiene todos los elementos de la diagonal son diferentes de cero
- $\det \hat{\mathbf{A}} \neq 0$

Teorema de Cramer

Solución de sistemas lineales por determinantes

Teorema de Cramer

(a) Si un sistema lineal de n ecuaciones y del mismo número de incognitas tinen un determinante diferente de cero $D = \det \mathbf{A} \neq 0$, el sitema tiene exactamente una solución.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

y la solución esta dada por las fórmulas

$$x1 = \frac{D_1}{D}, \quad x2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad xn = \frac{D_n}{D}, \quad \text{Regla de Cramer}$$

(b) Por lo tanto, si el sistema es homogéneo y $D \neq 0$, únicamente tiene solución trivial $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \cdots,\ x_n = 0,$. Si $D = 0$, el sistema hopmogéneo también tiene soluciones no triviales.

Teorema de Cramer

Solución de sistemas lineales por determinantes

La Matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$ del sistema de ecuaciones es de tamaño $n \times n+1$, aquí el rango máximo puede ser n. Ahora si

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces el rango de $\mathbf{A}$ es n por el teorema 3. Por lo tanto el rango $\tilde{\mathbf{A}} =$ el rango de $\mathbf{A}$ y por el teorema fundamental el sistema tiene solución única.

Teorema de Cramer

Solución de sistemas lineales por determinantes

Para probar la regla de Cramer.

- Desarrollar D por la $k-$ésima columna:
$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk}$$
donde C_{ik} es el cofactor del elemento a_{ik} de D.

- Se sustituyen los elementos de la $k-$ésima columna de D, y se desarrolla por la $k-$ésima columna:
$$\tilde{D} = \tilde{a}_{1k}C_{1k} + \tilde{a}_{2k}C_{2k} + \cdots + \tilde{a}_{nk}C_{nk}$$
los elementos $\tilde{a}_{1k}, \cdots, \tilde{a}_{nk}$ reemplazan a $a_{1k}, \cdots, a_{nk}$ y los cofactores C_{ik} son los mismos.

- Sí se eligen como nuevos números elementos de $a_{1l}, \cdots, a_{nl}$ ($l-$ésima columna de D), con $l \neq k$, se obtiene:
$$a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \cdots + a_{nl}C_{nk} = 0$$

Teorema de Cramer

Solución de sistemas lineales por determinantes

Para probar la regla de Cramer. (Continuación)

- ⋆ Multiplicando la primer ecuación por C_{1k} a ambos lados, la segunda por C_{2k} y así sucecivamente se obtiene:
$$C_{1k}(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)+C_{2k}(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)+\cdots+C_{nk}(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n) = b_1C_{1k}+b_2C_{2k}+\cdots+b_nC_{nk}$$
- ⋆ Agrupando los términos con el mismo X_j se reescribe el lado izquierdo así:
$$x_1(a_{11}C_{1k}+a_{21}C_{2k}+\cdots+a_{n1}C_{nk})+x_2(a_{12}C_{1k}+a_{22}C_{2k}+\cdots+a_{n2}C_{nk})+\cdots+x_n(a_{1n}C_{1k}+a_{2n}C_{2k}+\cdots+a_{nn}C_{nk})$$
- ⋆ Para x_k el factor es $a_{1k}C_{1k}+a_{2k}C2k+\cdots+a_{nk}Cnk$ que es igual a D
- ⋆ Para $l=1,\cdots,n: l\neq k$ el factor es $a_{1l}C_{1k}+a_{2l}C2k+\cdots+a_{nl}Cnk$ que es igual a cero
- ⋆ Así el lado izquierdo de la ecuación resulta en x_kD y la ecuación completa en
$$x_kD=b_1C_{1k}+b_2C_{2k}+\cdots+b_nC_{nk}$$

Teorema de Cramer

Solución de sistemas lineales por determinantes

Para probar la regla de Cramer. (Finalmente)

- ⋆ El lado derecho de la ecuación es D_k desarrollado por su $k-$ésima columna.
- ⋆ Dividiendo por D a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\frac{x_k D}{D} = \frac{b_1 C_{1k} + b_2 C_{2k} + \cdots + b_n C_{nk}}{D} = \frac{D_k}{D}$$

Agenda

Inversa de una matriz

Definición

Inversa de una matriz

La inversa de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ cuadrada de $n \times n$ es denotada por $\mathbf{A}^{-1}$ y, es una matriz cuadrada de $n \times n$ tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $n \times n$.

- ⋆ Si $\mathbf{A}$ tiene una inversa, entonces $\mathbf{A}$ es llamada **matriz no singular**.
- ⋆ Si $\mathbf{A}$ no tiene inversa, entonces $\mathbf{A}$ es llamada **matriz singular**.
- ⋆ Si $\mathbf{A}$ tiene una inversa, la inversa es única.

Si tanto $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son inversas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ así:

$$\mathbf{B} = \mathbf{IB} = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{CI} = \mathbf{C}$$

Inversa de una matriz

Existencia de la inversa

Existencia de la inversa

La inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ existe si y solo si el rango de $\mathbf{A} = n$. Por lo tanto $\mathbf{A}^{-1}$ existe si y solo si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Además $\mathbf{A}$ es *no singular* si el rango de $\mathbf{A} = n$ y es singular si el rango de $\mathbf{A} < n$

- Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$ y considere el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
- Si la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ existe, entonces la multiplicación por la izquierda a ambos lados del sistema resulta

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Lo cual muestra que el sistema tiene una solución $\mathbf{x}$.

Inversa de una matriz

Existencia de la inversa

Existencia de la inversa

La inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ existe si y solo si el rango de $\mathbf{A} = n$. Por lo tanto $\mathbf{A}^{-1}$ existe si y solo si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Además $\mathbf{A}$ es *no singular* si el rango de $\mathbf{A} = n$ y es singular si el rango de $\mathbf{A} < n$

Sea el rango de $\mathbf{A} = n$, entonces el sistema tiene una única solución $\mathbf{x}$ para cualquier $\mathbf{b}$. Ahora por sustitución hacia atrás se muestra que los componentes x_j de $\mathbf{x}$ son combinaciones lineales de esos $\mathbf{b}$, entonces

$$\mathbf{x} = \mathbf{Bb}$$

con $\mathbf{B}$ para ser determinada.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{Bb}) = (\mathbf{AB})\mathbf{b} = \mathbf{Cb} = \mathbf{b} \qquad (\mathbf{C} = \mathbf{AB})$$

Así $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Similarmente

$$\mathbf{x} = \mathbf{Bb} = \mathbf{B}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{BA})\mathbf{x}$$

para cualquier $\mathbf{x}$ (y $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$), Aquí $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, así $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ existen.

Inversa de una matriz

Determinación por el método de Gauss-Jordan

Para determinar la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de una matriz no singular $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es una variante de eliminación método de Gauss llamado eliminación de Gauss-Jordan

- ⋆ Usando $\mathbf{A}$ se forman n sistemas lineales

$$\mathbf{Ax}_{(1)} = \mathbf{e}_{(1)}, \cdots, \mathbf{Ax}_{(n)} = \mathbf{e}_{(n)}$$

  Donde los vectores $e_{(1)}, \cdots, e_{(n)}$ son los vectores columna de la matriz unitaria $\mathbf{I}$ de $n \times n$

- ⋆ Combinamos los n vectores ecuaciones en una simple ecuación matricial de la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ donde $\mathbf{X}$ es la matriz de incognitas que tiene las columnas $\mathbf{x}_{(1)}, \cdots, \mathbf{x}_{(n)}$
- ⋆ Ahora multiplicamos por la izquierda por $\mathbf{A}^{-1}$ y obtenemos

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \qquad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$$

- ⋆ Así, para solucionar $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ podemos aplicar el método de eliminación de Gauss a la matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{I}]$

Inversa de una matriz

Determinación por el método de Gauss-Jordan - Ejemplo

Determinar la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz

Determinación por el método de Gauss-Jordan - Ejemplo

Eliminación por Gauss

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \color{red}{Fila2 + 3Fila1} \\ \color{red}{Fila3 - Fila1} \end{array}$$

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \color{red}{Fila3 - Fila2} \end{array}$$

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Inversa de una matriz

Determinación por el método de Gauss-Jordan - Ejemplo

Pasos adicionales de Gauss-Jordan

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1)Fila1 \\ (0.5)Fila2 \\ (-0.2)Fila3 \end{array}$$

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} Fila1 + 2Fila3 \\ Fila2 - 3.5Fila1 \\ \end{array}$$

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} Fila1 + Fila2 \\ \\ \end{array}$$

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right]$$

Inversa de una matriz

Determinación por el método de Gauss-Jordan - Ejemplo

Así las últimas tres columnas corresponden a la matriz inversa.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Se puede constatar mediante la multiplicación de matrices

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz

Inversa de una matriz por determinantes

La inversa de una matriz no singular $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ esta dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[C_{jk}]^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Donde C_{jk} es el cofactor de a_{jk} en $\det \mathbf{A}$. En particular la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad es \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$