Ejemplos de Modelos en Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Hugo Franco, PhD

Principios de Modelado y Simulación

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (PDE´s)

Definiendo la ecuación diferencial parcial de segundo orden en su forma canónica, se tiene:

$$a\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial y^2} + d\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} + e\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} = G(x,\ y)$$

$b - 4\,ac > 0$	Hiperbólica
$b - 4\,ac = 0$	Parabólica
$b - 4\,ac < 0$	Elíptica

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (PDE´s)

- Ecuación Parabólica:

  Ecuación de Difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Ecuación Elíptica:

  Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- Ecuación Hiperbólica:
  - Hiperbólica de primer orden

    Ecuación de Advección

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

  - Hiperbólica de segundo orden

    Ecuación de Onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

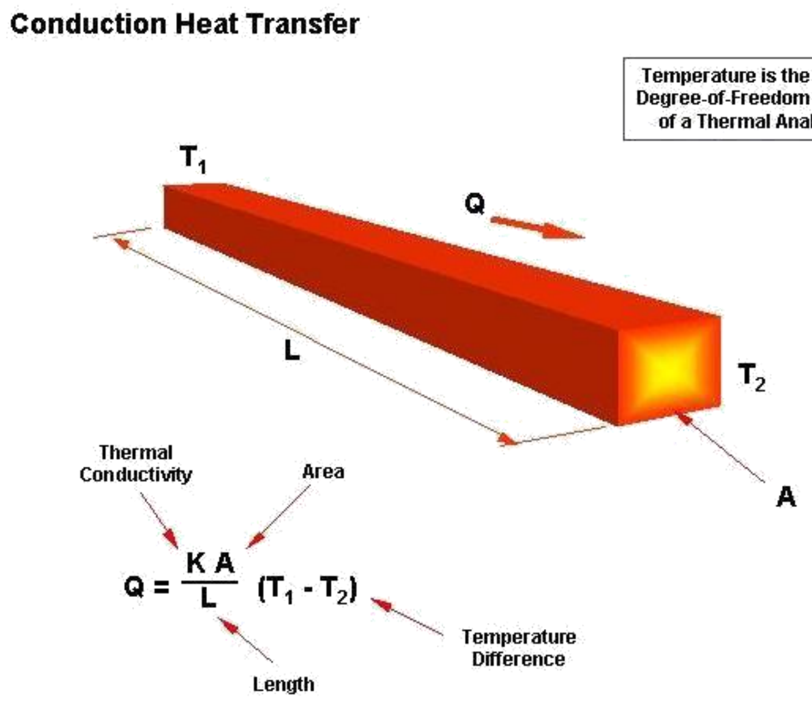
UTADEO UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

CONDICIONES AUXILIARES ASOCIADAS A UNA E.D

- Condiciones de Borde:
  - Condiciones de Dirichlet: $u(0, t) = u_0(t)$
  - Condiciones de Neumann: $\dfrac{\partial u(L, t)}{\partial x} = u_x(L, t) = g(t)$
  - Condiciones de Robin o Fourier: $D\,\dfrac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \gamma\, u(0, t)$
- Condiciones Iniciales

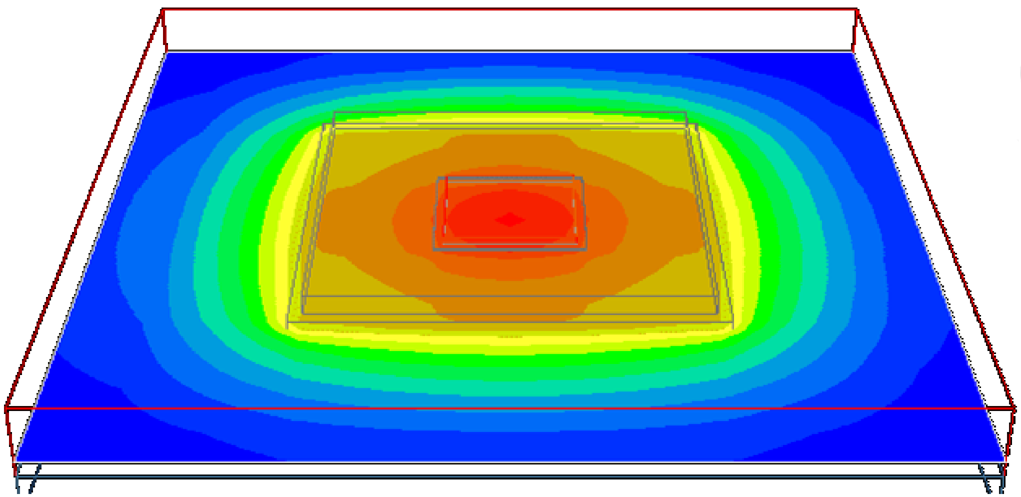
EJEMPLOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ASOCIADAS A CIERTOS FENÓMENOS FÍSICOS.

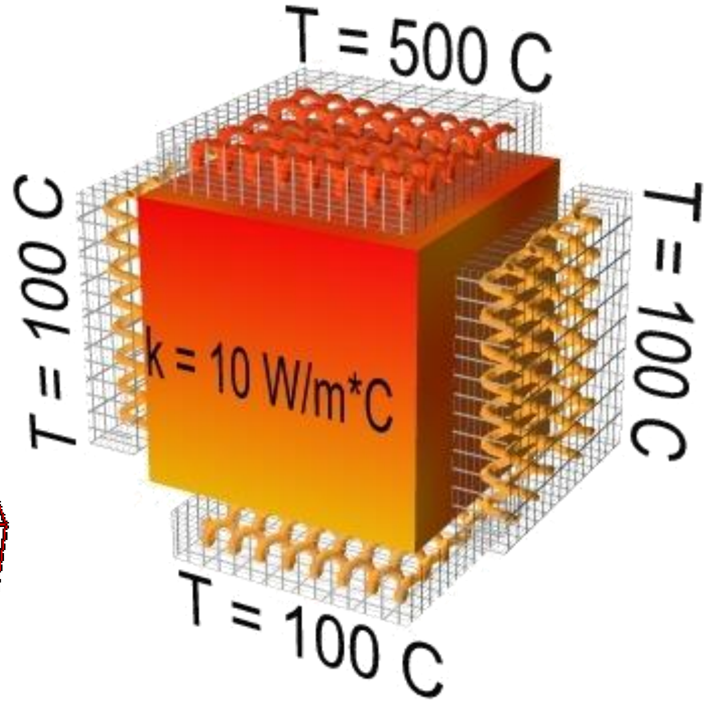
- Ecuación de la Conducción de Calor Unidimensional



$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ECUACIÓN GENERAL PARA LA CONDUCCIÓN DE CALOR



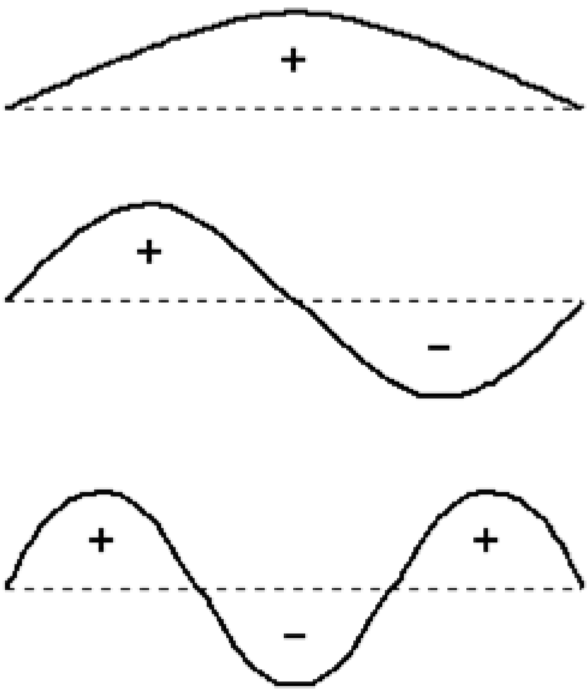


$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{k} q_{gen}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

ECUACIÓN DE LA ONDA PARA UN DOMINIO UNIDIMENSIONAL



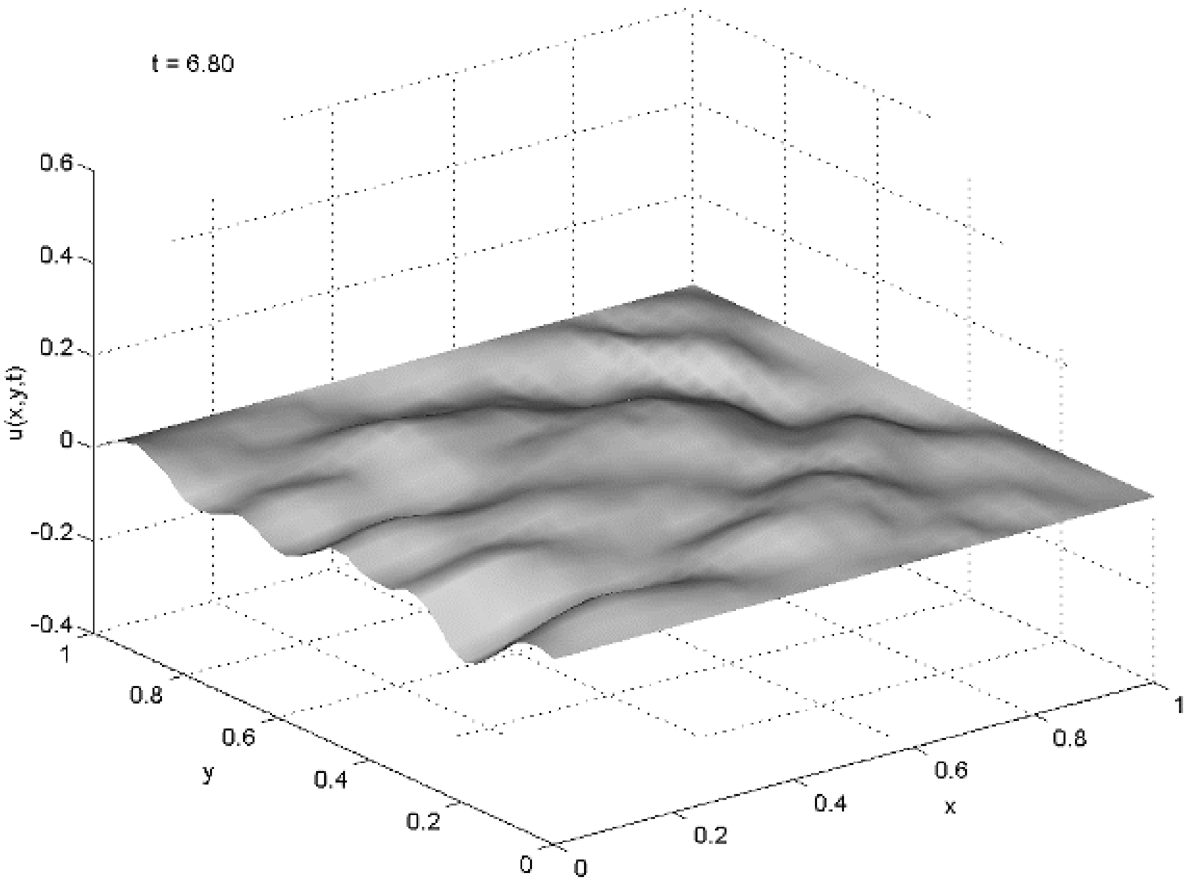
Frecuencia más baja (λ_1)

Segunda frecuencia (λ_2)

Tercera frecuencia (λ_3)

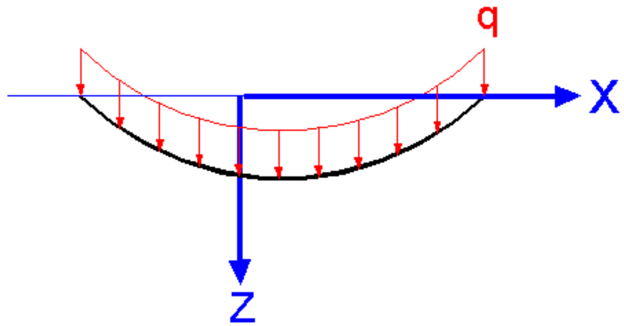
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

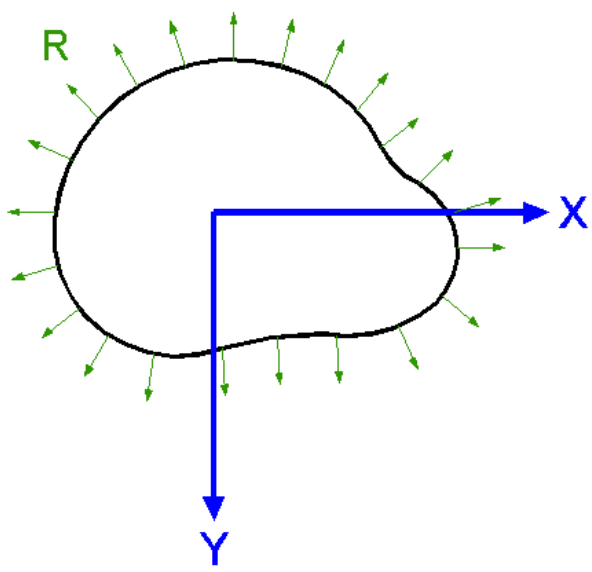
ECUACIÓN DE LA ONDA PARA UN DOMINIO BIDIMENSIONAL



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

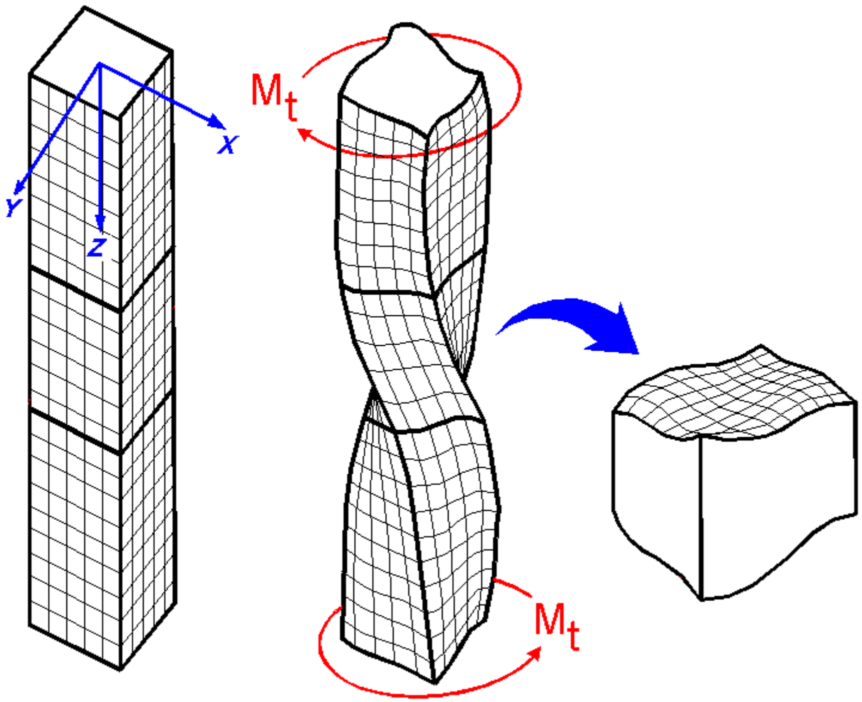
ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA LA DEFLEXIÓN DE UNA MEMBRANA ELÁSTICA





$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{R}$$

Torsión en Barras Prismáticas



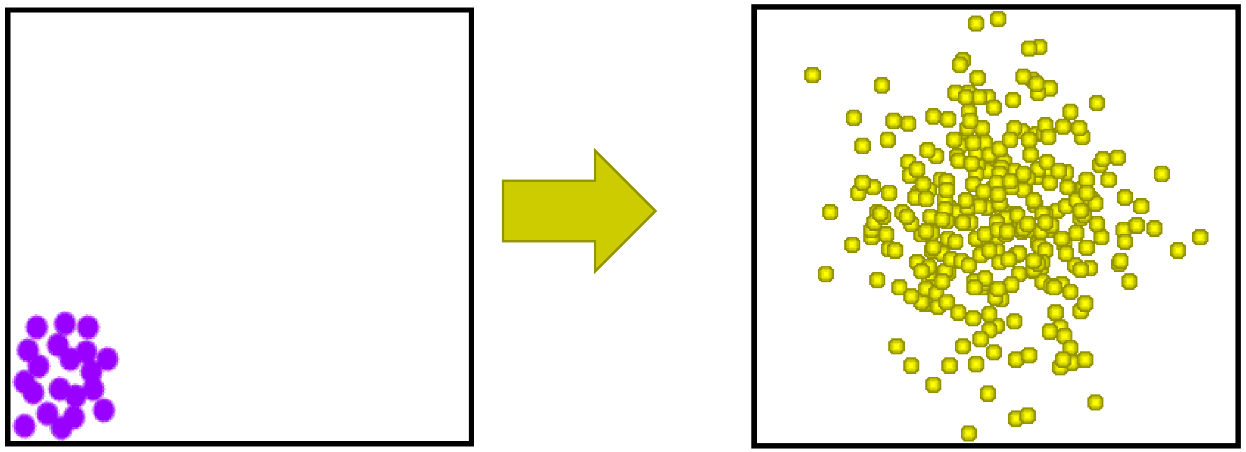
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\,G\theta$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Difusión



$$u_t = k\,\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} = k\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) U(x, y, t)$$

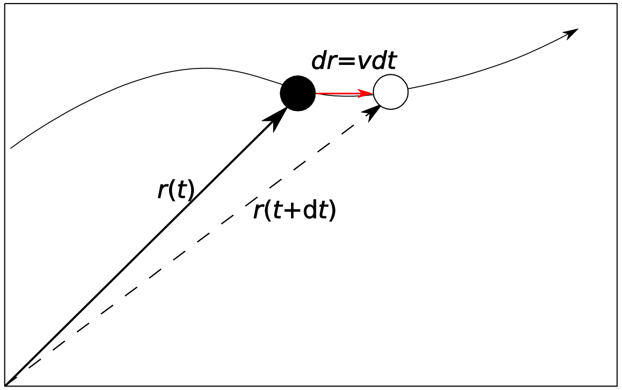
UNIVERSIDAD CENTRAL UTADEO

Ejemplo: Ecuación de transporte

- **Partícula Fluida:** elemento mínimo de volumen en un fluido que cumple la hipótesis del continuo - Número de Knudsen:

$$\ell / L \ll 1$$

- Aquí, ℓ es el recorrido mínimo libre y *L* es la longitud característica macroscópica
- Sea **r**(*t*) la posición de la partícula fluida en el contenedor del fluiido en el tiempo *t* (aproximación Lagrangiana. La velocidad de la partícula a lo largo de su trayectoria es:

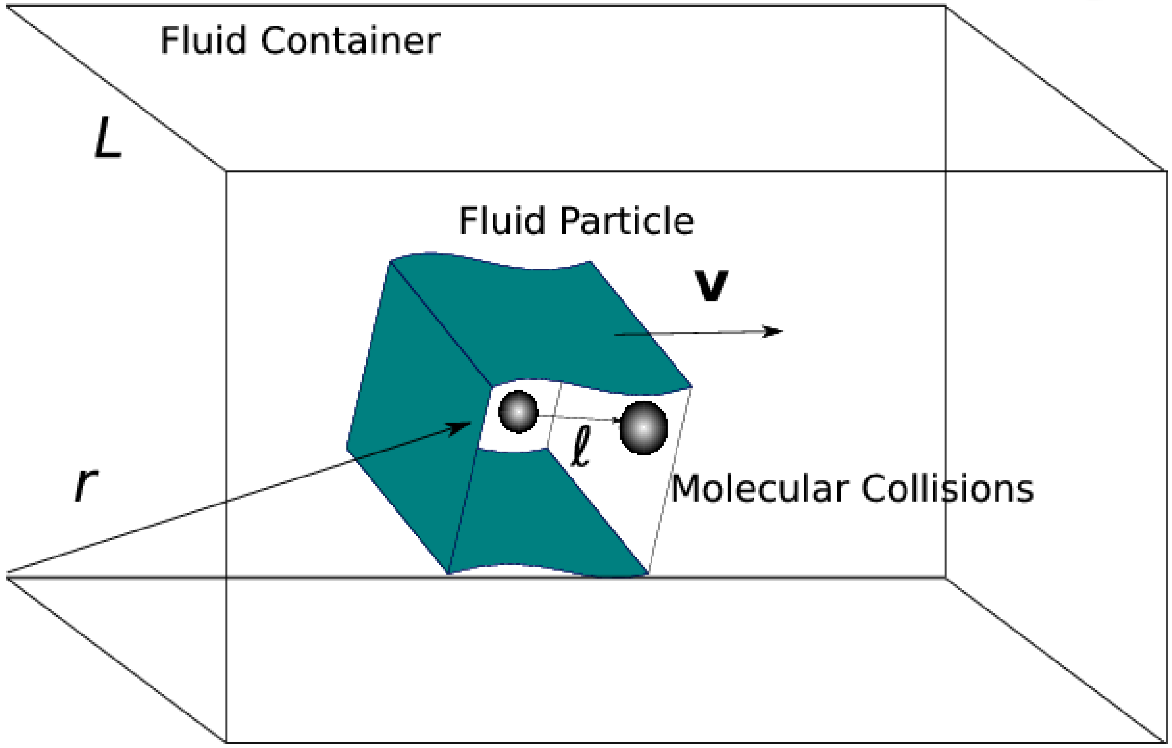


$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \; \mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Ejemplo: Ecuación de transporte



- Para establecer la dinámica del Sistema fluido, es necesario estimar la tasa de cambio de velocidad de cada partícula fluida, de acuerdo a las interacciones internas y externas del sistema

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Ejemplo: Ecuación de transporte

Por la definición de velocidad, en t + dt la partícula fluida estará en la posición **r** + d**r** = **r** + **v** (**r** , t) dt . Así, su velocidad en esta nueva posición se puede aproximar por Series de Taylor:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)dt, t+dt) \quad = \quad \mathbf{v}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t}dt + \left[\sum v_i(\mathbf{r},t)\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial x_i}\right]dt + O(t^2)$$

Así, la aceleración de la partícula se estima mediante la aplicación de la definición de derivada para la velocidad en **r** + d**r**:

$$\begin{aligned} \lim_{dt\to 0}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)dt, t+dt)-\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{dt} &= \left[\sum v_i(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right] + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla)\,\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \end{aligned}$$

Luego, usando notación de operadores, la aceleración en su trayectoria es:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$$

The operator D/Dt = ($\partial/\partial t$ + **v** · ∇) es llamado “derivada material”

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Derivación intuitiva de la ecuación de transporte

- Ley de conservación relevante: segunda Ley de Newton

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{f}_i$$

- La correspondencia directa con el sistema fluido asumiendo que éste es incompresible, lleva a:

$$\underbrace{\int_{V_c} \rho dV_c}_{mass} \underbrace{\frac{D}{Dt}\mathbf{v}}_{acceleration} = \underbrace{-\nabla p}_{pressure\ difference} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{viscosity\ resistance}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

- Esta es la ecuación de Navier-Stokes para el transporte de momento (para fluidos incompresibles sin fuerzas externas V_c se toma como la unidad)

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

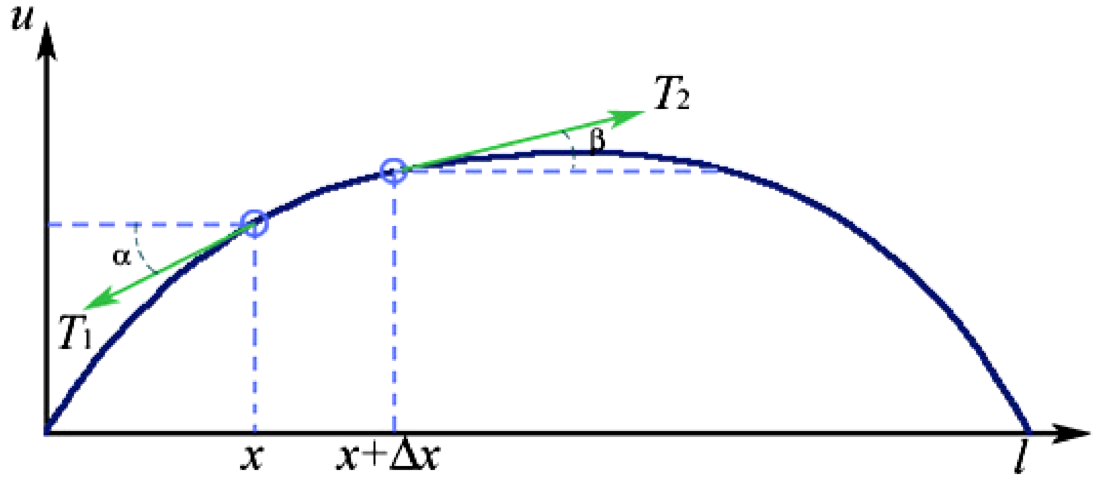
Ejemplo: cuerda vibrante (ecuación de onda 1D)

El diseño de cuerdas para instrumentos musicales parece ser un problema simple, sin embargo, la solución formal a este problema no es un procedimiento trivial, implica el empleo de herramientas matemáticas variadas e interesantes.

Si se deseara elaborar un código para asistir el diseño de cuerdas para instrumentos musicales y que además permita verificar la afinación de las mismas cuando se tensen en el instrumento, ¿cómo sería el modelo matemático a ser desarrollado?

UNIVERSIDAD CENTRAL
UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Ejemplo: Cuerda Vibrante

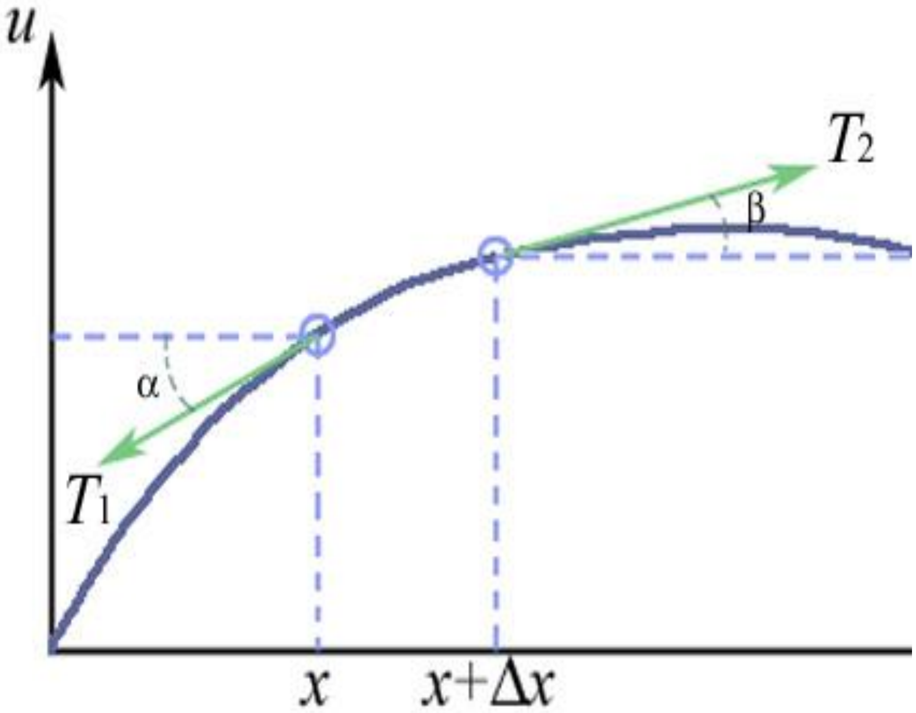


- La masa de la cuerda por unidad de longitud es constante (cuerda homogénea).
- La cuerda es perfectamente elástica y no ofrece resistencia a la deformación transversal.
- La tensión inicial de la cuerda antes de ser deformada es tan grande que el efecto del peso de la cuerda puede despreciarse.
- La oscilación de la cuerda puede ser representada como el movimiento de cada una de las partículas de la cuerda en sentido vertical.

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO

Ejemplo: Cuerda Vibrante



Ecuación de Conservación:

$$\boxed{\sum F_x = 0}$$

$$\boxed{T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T_0}$$

$$\boxed{\sum F_y = m.a}$$

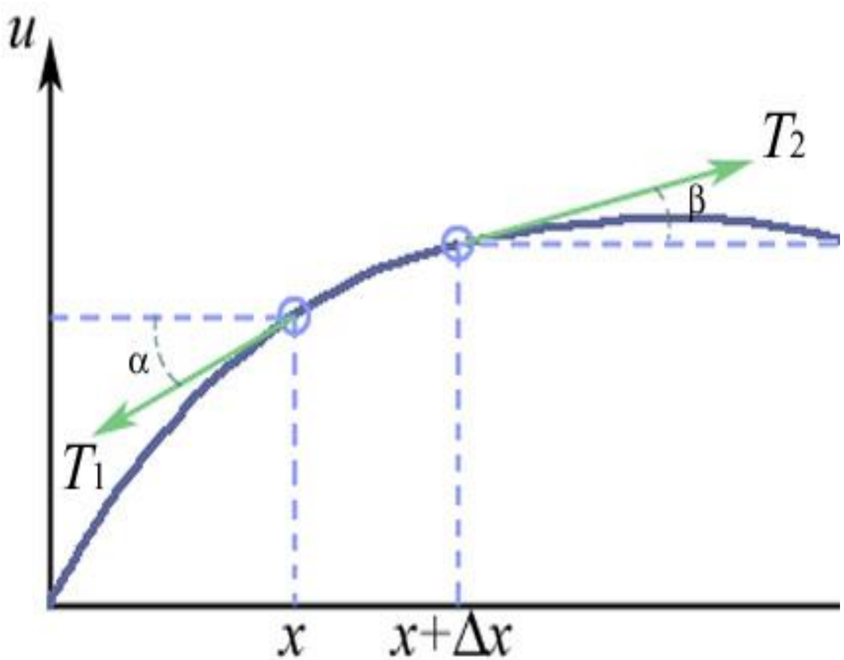
$$\boxed{T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho \Delta x}{T_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Ejemplo: Cuerda Vibrante



$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T_0}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x$$

$$\tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

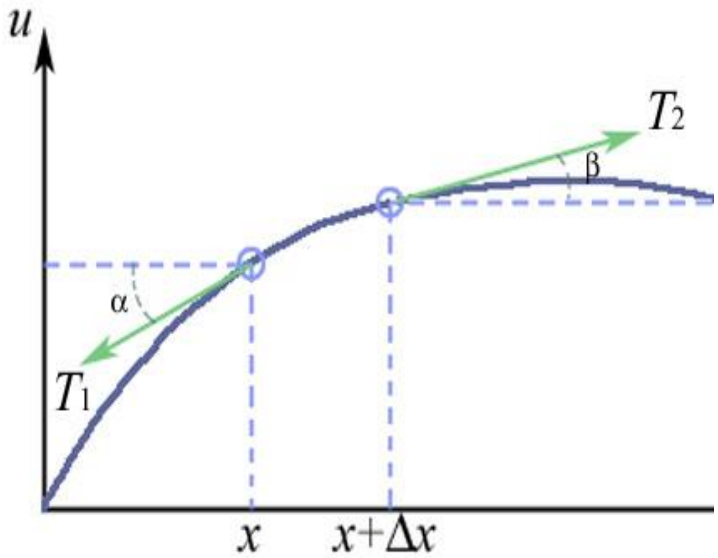
$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T_0}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

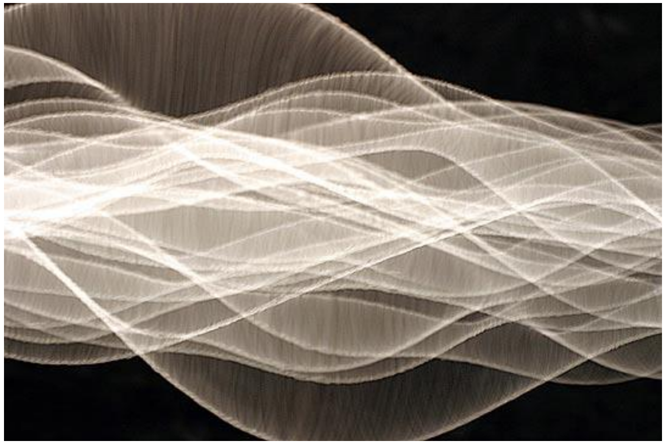
Formulación de la Ecuación de Onda 1D



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$c^2 = \frac{T_0}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

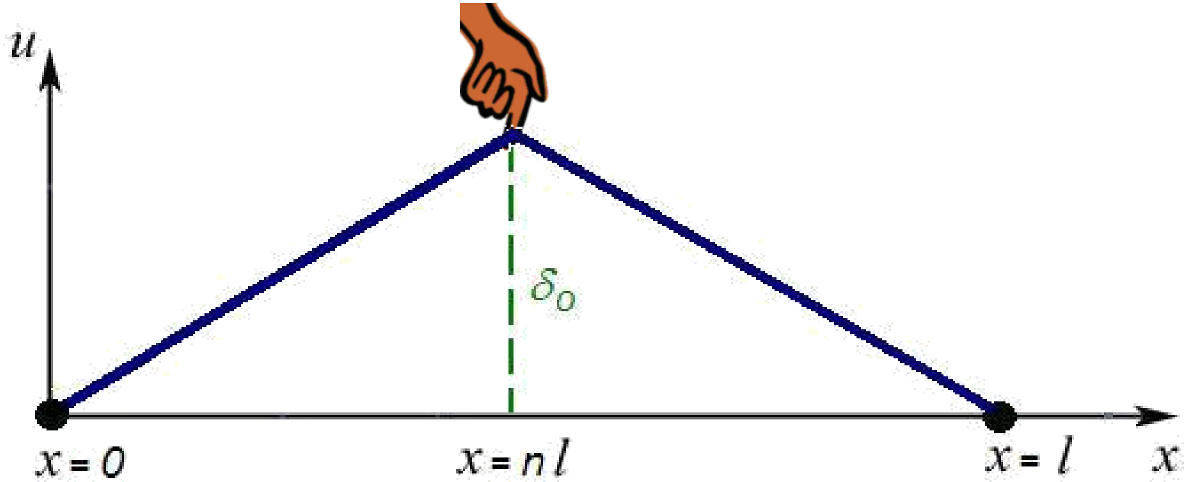


Ecuación Unidimensional de Onda

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Cuerda Vibrante: Solución Analítica (Ecuaciones Auxiliares)



- **Condiciones de Borde**:

$$u(0, t) = 0 \qquad u(l, t) = 0$$

- **Condiciones Iniciales:**

$$u(x, 0) = f(x) \qquad \dot{u}(x, 0) = g(x)$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Una solución puede ser construida **asumiendo** una función solución **u(x,t)** que este formada por el producto de dos funciones **F(x)** y **G(t)**, cada una de las cuales solo dependen de una variable.

$$u(x,t) = F(x).G(t)$$

Al aplicar esta función en la ecuación diferencial se encuentra que:

$$F(x).\ddot{G}(t) = c^2 G(t) F''(x)$$

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2.G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Cuerda vibrante: Solución Analítica

De lo anterior se puede concluir que el desarrollo del modelo se ha convertido en la solución simultánea de dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La primera con unas condiciones de borde dadas, la segunda con unas condiciones iniciales bien definidas.

Sistema de dos E.D.O´s

$$\begin{cases} F''(x) - k.F(x) = 0 \\ \ddot{G}(t) - k.c^2.G(t) = 0 \end{cases}$$

Para solucionar la primera de las E.D.O´s, se tiene una ecuación característica de la forma:

$$m^2 - k = 0$$

$$F(x) = A.e^{\mu x} + B.e^{-\mu x} \quad \text{con:} \quad k = \mu^2$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Conociendo las condiciones de borde, entonces:

$$A = 0 \qquad B = 0$$

$$\boxed{F(x) = 0}$$ Solución trivial ….!!

Si se suponen valores negativos de ***k***:

$$k = -p^2$$

$$F(x) = A.e^{ipx} + B.e^{-ipx}$$

Lo que puede reescribirse en términos de senos y cosenos como:

$$F(x) = A[\mathrm{Cos}(px) + i\mathrm{Sen}(px)]$$
$$+B[\mathrm{Cos}(px) - i\mathrm{Sen}(px)]$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Lo que es igual a:

$$F(x) = A' \cos(px) + B' \operatorname{Sen}(px)$$

Usando las condiciones de frontera, se encuentran nuevamente los valores de los coeficientes desconocidos.

$$F(0) = A' \cos(0) + B' \operatorname{Sen}(0) = 0 \longrightarrow A' = 0$$

$$F(l) = \cancel{A'} \cos(pl) + B' \operatorname{Sen}(pl) = 0 \longrightarrow p = \frac{n\pi}{l}$$

$$\boxed{k = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}$$

$$\boxed{F(x) = B' \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

B´ no influye en la satisfacción de la E.D.O, ni en sus condiciones de frontera, entonces puede tomar cualquier valor, p. ej. la unidad.

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Finalmente ya se tiene la solución de una de las funciones …

$$\boxed{F(x) = \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right)}$$

Incluir la componente temporal implica desarrollar la E.D.O:

$$\ddot{G}(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 . c^2 . G(t) = 0$$

$$\ddot{G}(t) + \lambda_n{}^2 . G(t) = 0$$

La solución de esta ecuación tendrá la forma:

$$G(t) = C_n \,\mathrm{Cos}\,(\lambda_n t) + D_n \,\mathrm{Sen}\,(\lambda_n t)$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Y la función solución **u(x,t)** tendrá la forma:

$$u(x,t) = [C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \operatorname{Sen}(\lambda_n t)] . \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Aunque la solución general será una combinación lineal de todas las soluciones que pueden obtenerse para n=1,…..,∞ .

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \operatorname{Sen}(\lambda_n t)] . \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right)}$$

Obsérvese que para los valores de ***x***:

$$x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n} l \longrightarrow u(x,t) = 0$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Para determinar el valor de los ***n*** coeficientes C_n y D_n, se requiere evaluar las condiciones iniciales. Con la primera condición inicial:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n . \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$$

Es decir, la función de forma inicial ***f(x)*** se está expresada como una expansión en series de Fourier, y:

$$\boxed{C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) . \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Cuerda vibrante: Solución Analítica

En cuanto a la segunda condición inicial:

$$\dot{u}\,(x,\,0) = g\,(x)$$

$$\dot{u}\,(x,\,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n . \lambda_n . \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right) = g\,(x)$$

Se ve como la función ***g(x)*** se está expresanda también como una expansión en series de Fourier, donde:

$$\boxed{D_n = \frac{2}{l . \lambda_n} \int_0^l g\,(x)\ .\mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right) dx}$$

Nota: Obsérvese que si la velocidad inicial es nula ***g(x) = 0***, no hay coeficientes D_n, de modo que la solución general se reduce.

UNIVERSIDAD CENTRAL

UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO