Modelado a partir de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDDPs)

Algunos Ejemplos

UNIVERSIDAD CENTRAL

Hugo Franco, PhD

2 de mayo de 2015

Cuerda vibrante: Solución Analítica

Para determinar el valor de los ***n*** coeficientes C_n y D_n, se requiere evaluar las condiciones iniciales. Con la primera condición inicial:

$$u\,(x,\,0) = f\,(x)$$

$$u\,(x,\,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n . \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right) = f\,(x)$$

Es decir, la función de forma inicial ***f(x)*** se está expresada como una expansión en series de Fourier, y:

$$\boxed{C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f\,(x)\;.\mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right) dx}$$

Cuerda vibrante: Solución Analítica

En cuanto a la segunda condición inicial:

$$\dot{u}\,(x,\ 0) = g\,(x)$$

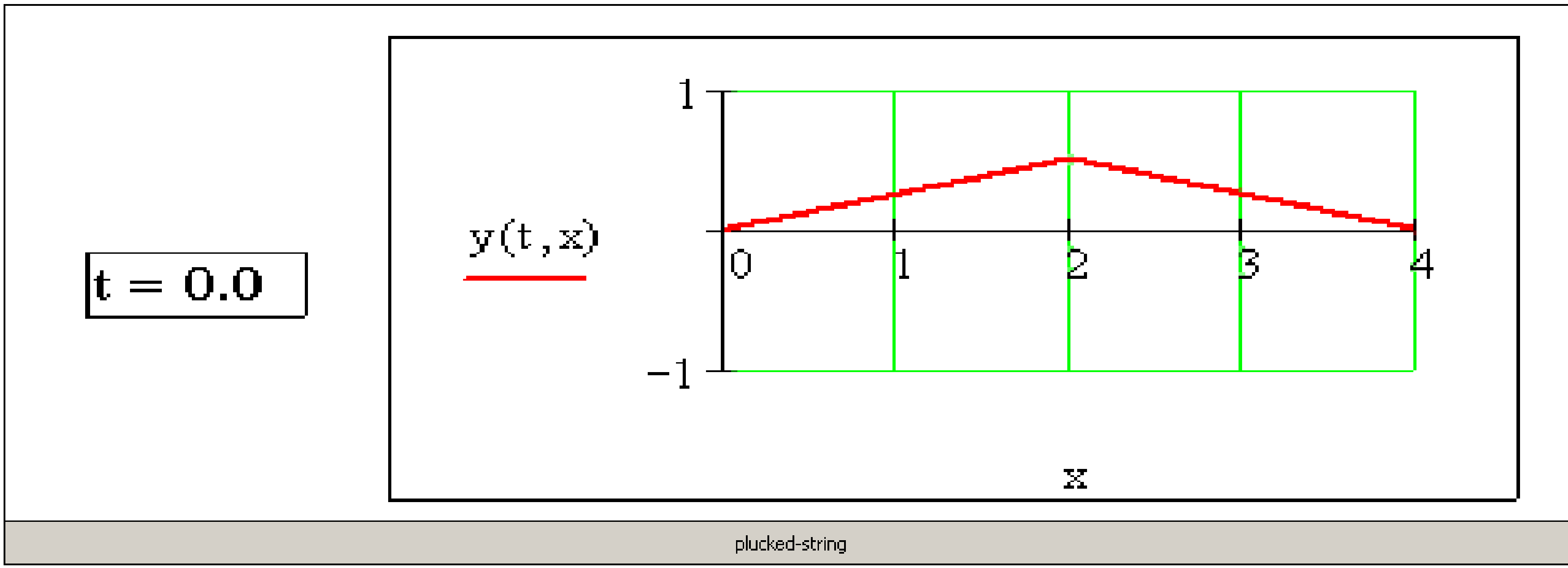
$$\dot{u}\,(x,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n . \lambda_n . \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right) = g\,(x)$$

Se ve como la función ***g(x)*** se está expresanda también como una expansión en series de Fourier, donde:

$$\boxed{D_n = \frac{2}{l . \lambda_n} \int_0^l g\,(x)\ . \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right) dx}$$

Nota: Obsérvese que si la velocidad inicial es nula ***g(x) = 0***, no hay coeficientes D_n, de modo que la solución general se reduce.

ANÁLISIS DEL MODELO



$$u\,(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \operatorname{Cos}\,(\lambda_n\, t) + D_n \operatorname{Sen}\,(\lambda_n\, t)\right].\operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right)$$

Análisis del modelo

Recordando que:

$$c^2 = \frac{T_0}{\rho} \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} . c$$

entonces:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} . \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &u(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi}{l} . \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} . t\right) \right. \\ &\left. + D_n \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l} . \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} . t\right)\right] . \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \end{aligned}}$$

ANÁLISIS DEL MODELO

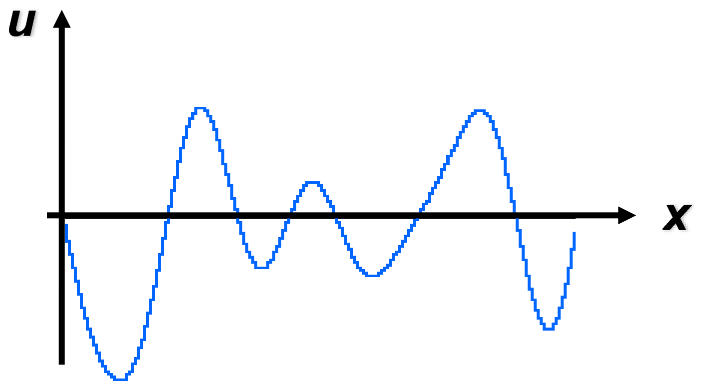
Asumiendo p.ej. una velocidad inicial nula, la solución a la ecuación de onda es:

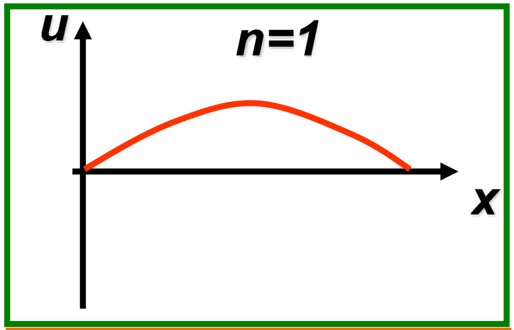
$$u(x,t) = \boxed{C_1 \operatorname{Cos}(\lambda_1 t).\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{l}x\right)}$$

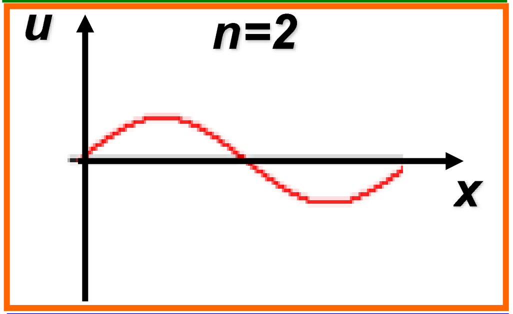
$$+\boxed{C_2 \operatorname{Cos}(\lambda_2 t).\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}$$

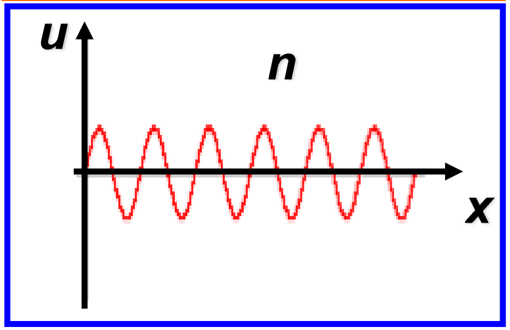
$$+\ \ldots$$

$$+\boxed{C_n \operatorname{Cos}(\lambda_n t).\operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$



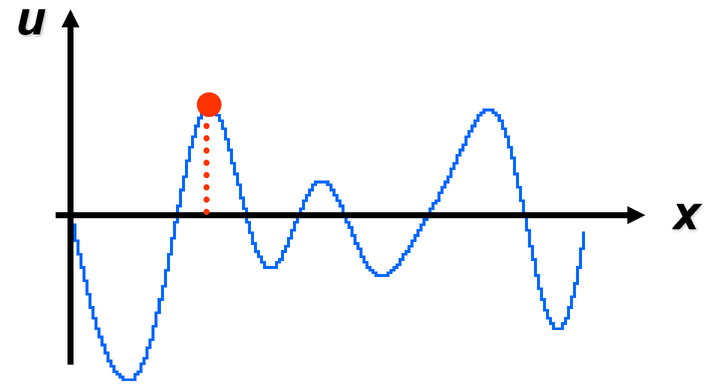


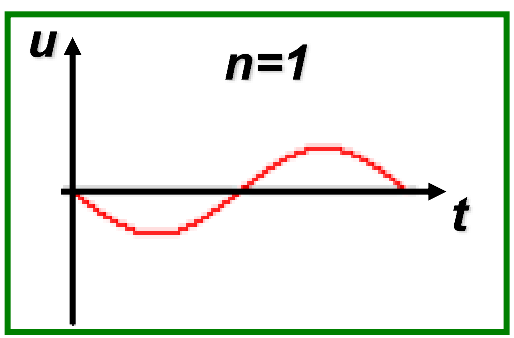




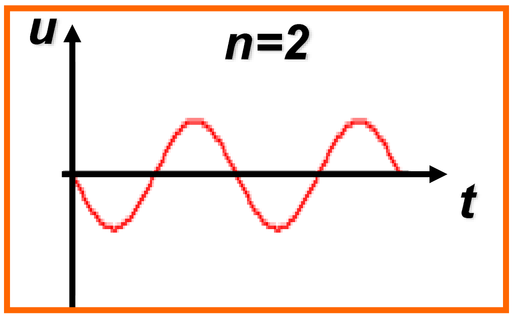
ANÁLISIS DEL MODELO

$$
\begin{aligned}
u\,(x,\,t) = {} & C_1\,\mathrm{Sen}\left(\frac{\pi}{l}\,x\right).\mathrm{Cos}\,(\lambda_1\,t) \\
& + C_2\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2\,\pi}{l}\,x\right).\mathrm{Cos}\,(\lambda_2\,t) \\
& + \ldots \\
& + C_n\,\mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right).\mathrm{Cos}\,(\lambda_n\,t)
\end{aligned}
$$



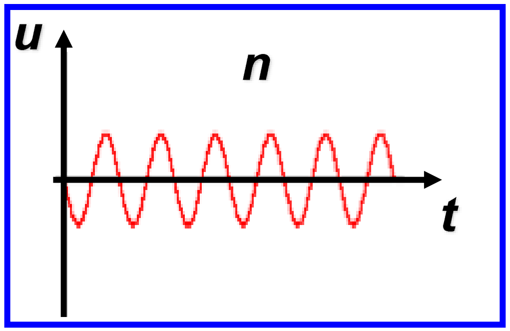


Componente
Fundamental



Componente
Primer Armónico

.....



Componente
(n-1)-esímo Armónico

ANÁLISIS DEL MODELO

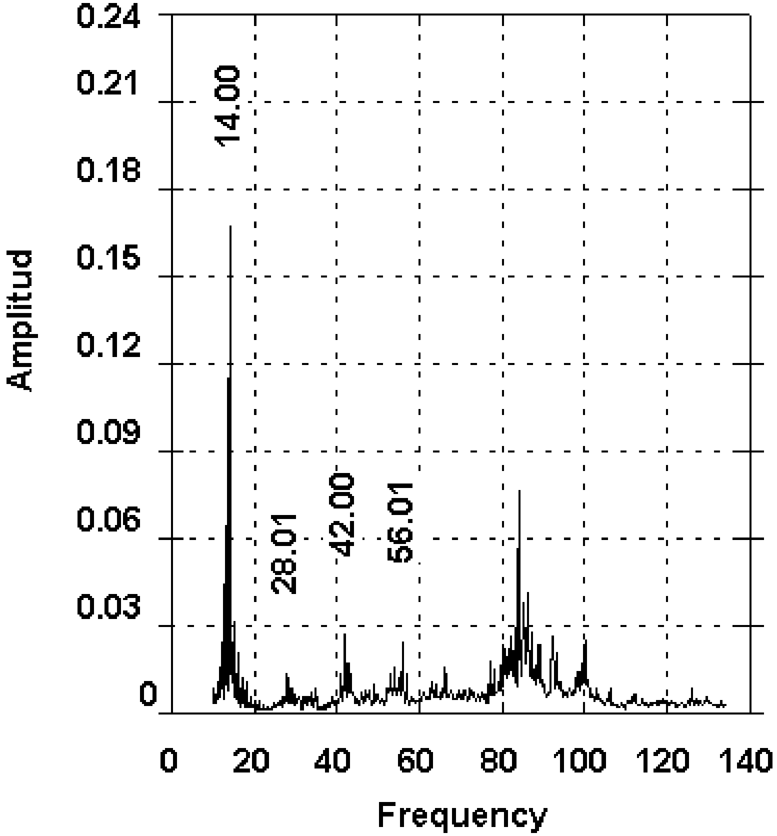
Frecuencias de las componentes de la función general:

$$\boxed{f_n = \frac{n\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}}$$

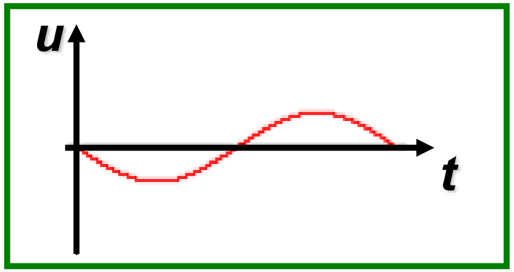
$$f_1 = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$ *Frecuencia Fundamental*

$$f_2 = \frac{2\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$ *Primer Armónico*

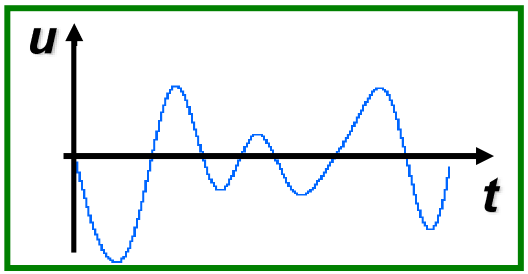
$$f_3 = \frac{3\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$ *Segundo Armónico*



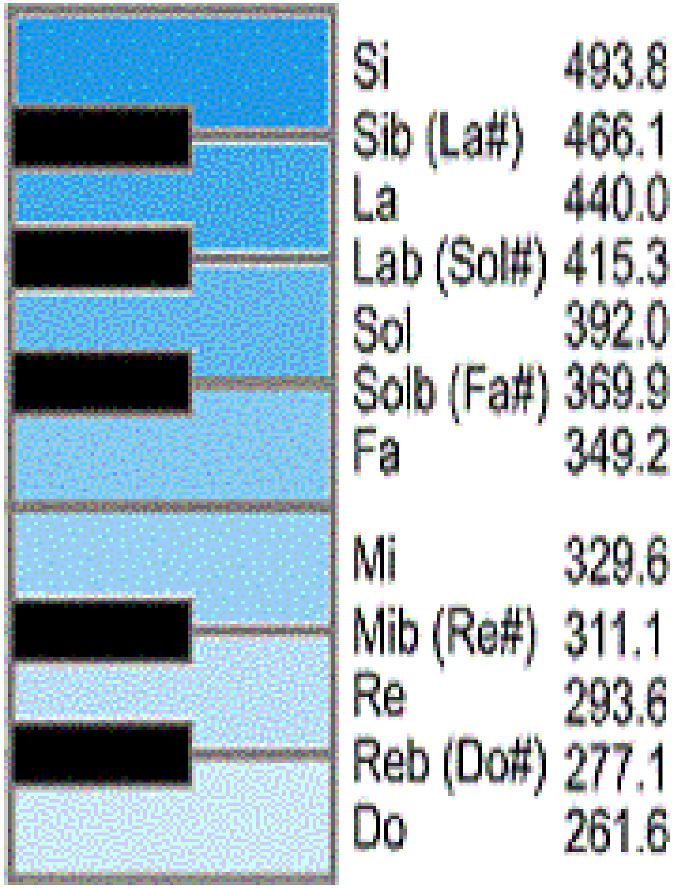
ANÁLISIS DEL MODELO



Sonido de 440 Hz (Nota ***La***), compuesto únicamente por la frecuencia fundamental.



Sonido de 440 Hz (Nota ***La***), compuesto por la frecuencia fundamental y varios armónicos.



Análisis del modelo

Reescribiendo la función solución general, empleando la identidad:

$$\frac{1}{2}\,\text{Sen}\left[\frac{n\pi}{l}\,(x-ct)\right]+\frac{1}{2}\,\text{Sen}\left[\frac{n\pi}{l}\,(x+ct)\right]$$
$$=\text{Cos}\left(\frac{cn\pi}{l}\,t\right)\,\text{Sen}\left(\frac{n\pi}{l}\right)$$

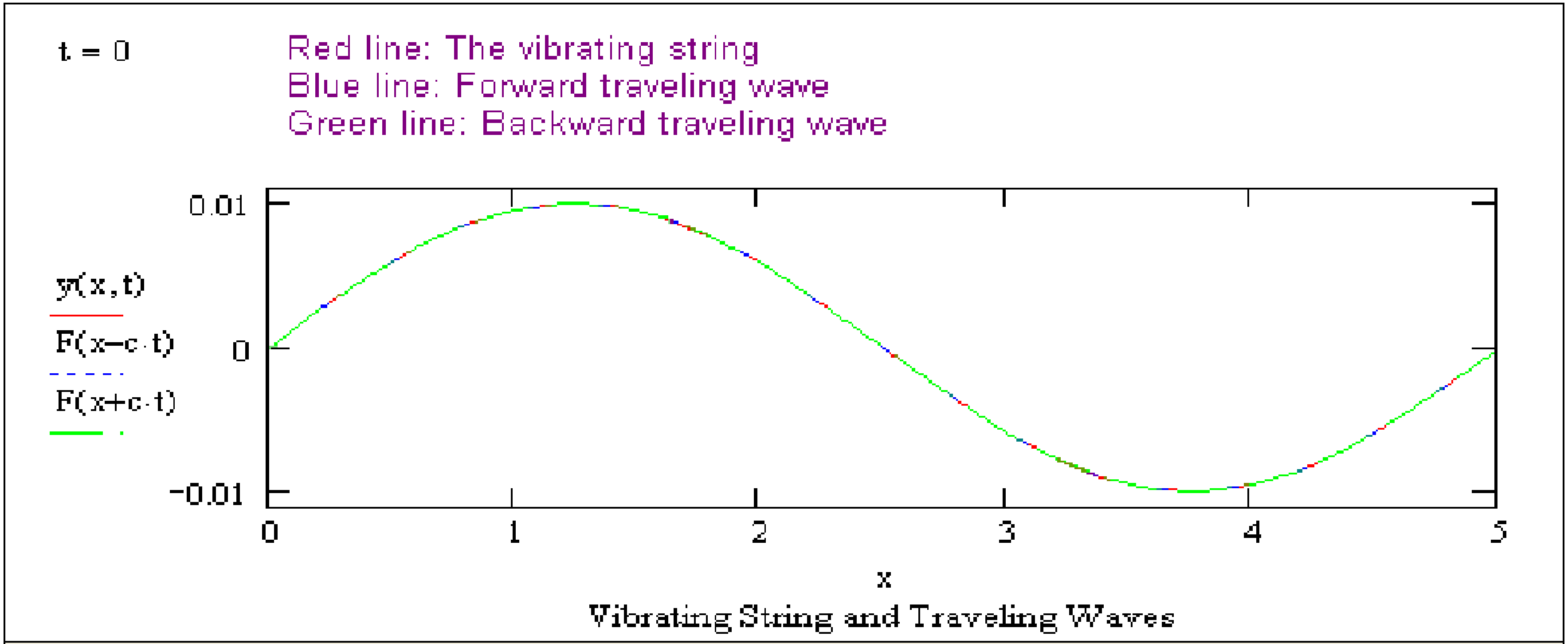
$$\boxed{u\,(x,\,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\text{Sen}\left[\frac{n\pi}{l}\,(x-ct)\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\text{Sen}\left[\frac{n\pi}{l}\,(x+ct)\right]}$$

$$u\,(x,\,t)=\frac{1}{2}\,\boxed{f\,(x-ct)}+\frac{1}{2}\,\boxed{f\,(x+ct)}$$

Onda viajando a la derecha a velocidad ***c***

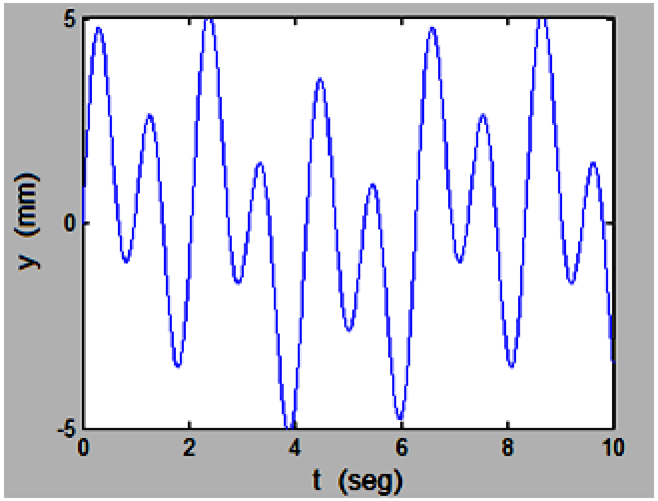
Onda viajando a la izquierda a velocidad ***c***

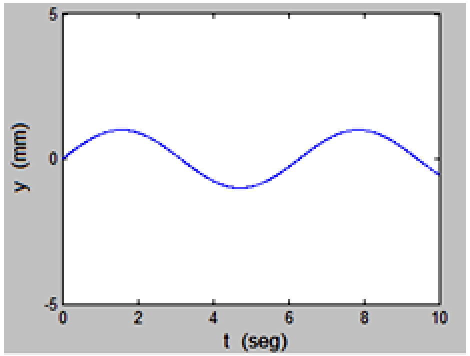
Análisis del modelo



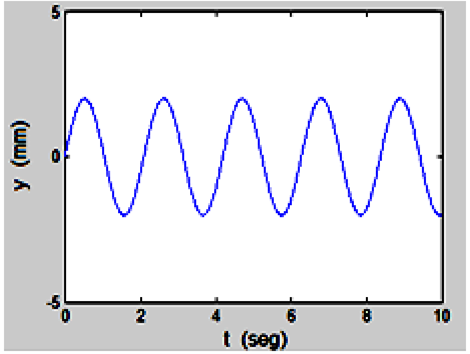
pde.avi

Herramientas adicionales: Transformada Rápida de Fourier

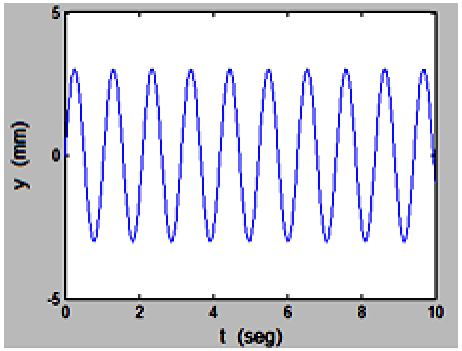




$y_1(t) = \mathrm{Sen}(t)$



$y_2(t) = 2\,\mathrm{Sen}(3t)$

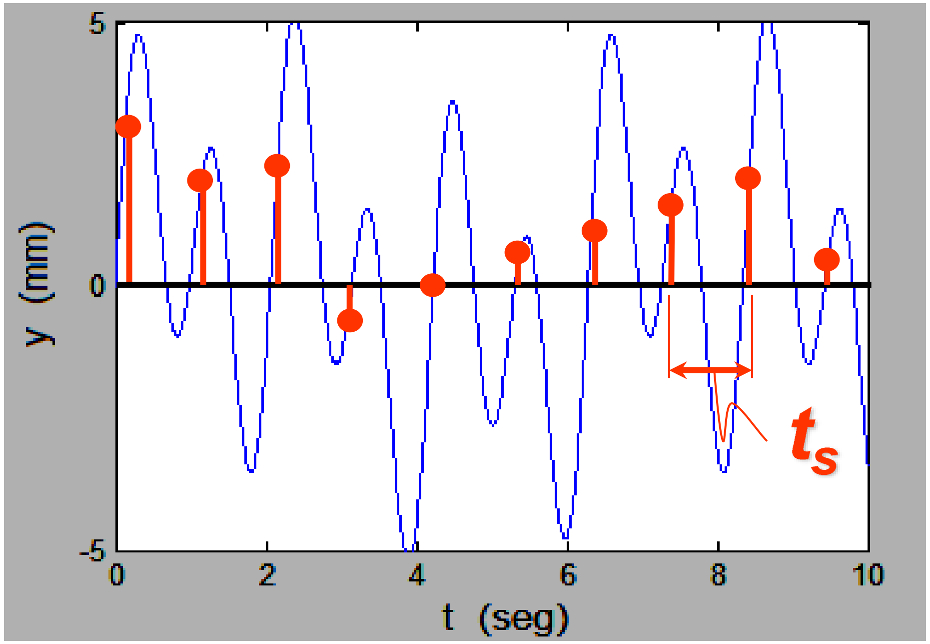


$y_3(t) = 3\,\mathrm{Sen}(6t)$

Herramientas: Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-i\omega t}.dt$$

Transformada de Fourier

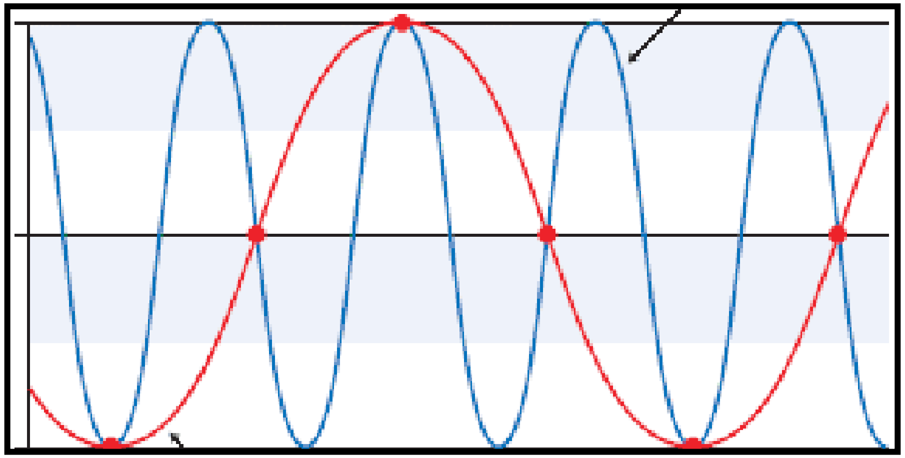


Función Continua

Lecturas Discretas

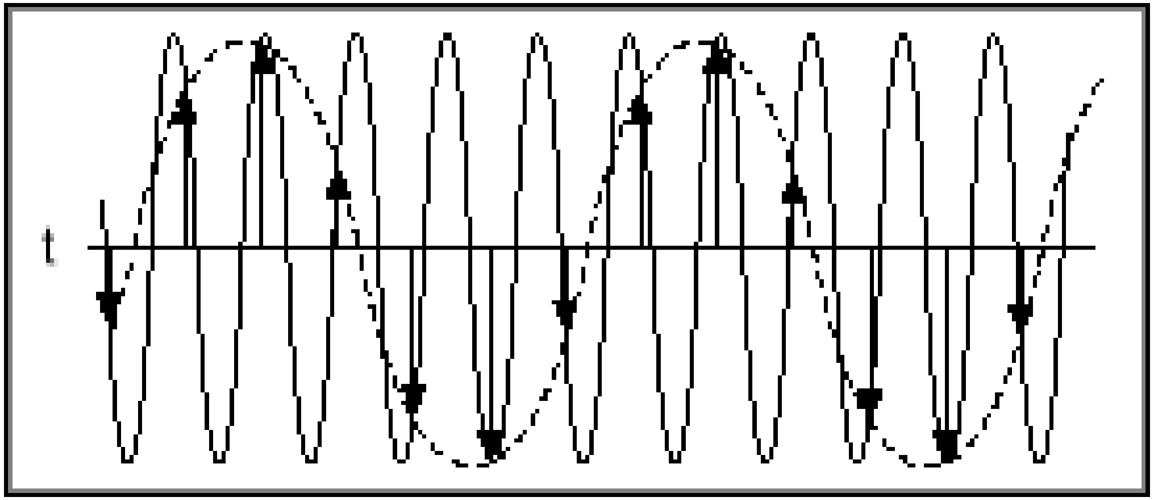
$$f_s = \frac{1}{t_s}$$

Herramientas adicionales: Transformada Rápida de Fourier



Función Continua

Lecturas Discretas



ERROR ALIASING

$$f_s \geq 2 * f$$

HERRAMIENTAS ADICIONALES: TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER