MM&S

Taller sobre cálculo en una variable

Profesor: Camilo Espejo

1. Usando la página `www.integral-calculator.com` encuentre las antiderivadas (o integral indefinida) de las siguientes funciones, luego verifique el resultado calculando la derivada de la función resultante. La sintaxis para escribir la función que se quiere integrar es sencilla: asterisco significa multiplicación, $\wedge$ significa exponente y `sqrt` raíz cuadrada, más ejemplos en la pestaña *examples*. Recuerde:

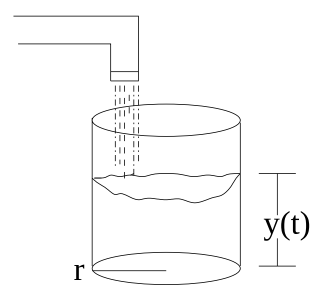
$$\begin{aligned} \int f(x)\mathrm{d}x &= G(x) \Longleftrightarrow G'(x) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} = f(x) \ \text{ Integral indefinida} \\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= G(b) - G(a) \ \text{ Integral definida} \end{aligned}$$

   - $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $h(x) = \frac{x^2}{x+1}$
   - $m(x) = x^2 \sin x$, $n(x) = \sin(4x)e^{-x}$, $l(x) = \cos(x)\sin(x)$

2. Plantee una función que represente un semicirculo de radio 1. Escriba la integral definida que representa el área del semicirculo y use la página web mencionada para mostrar que su área es $\pi/2$. En la pestaña *Options* puede definir los límites inferior y superior de la intergral.

3. En el instante en que el recipiente de la figura empezó a llenarse de agua por medio del grifo, ya contenía un nivel de agua incial y_i. Desde ese momento el volumen de agua vertido por el grifo por unidad de tiempo (flujo) tiene la siguiente relación funcional con el tiempo:

$$F(t) = 4e^{-2t}$$



con F en litros por segundo (lt/s) y t en segundos (s). a) Exprese matemáticamente la realción entre un diferencial de tiempo dt y el consecuente diferencial de volumen vertido en el recipiente dV. b) Usando el cálculo integral obtenga la función $V(t)$, el volumen vertido de agua en función del tiempo transcurrido. Debe usar el hecho de que en $t = 0$, $V(0)$ corresponde al volumen inicial de agua en el recipiente. c) Aunque según la formula de arriba solo dejará de salir agua del grifo para un tiempo infinito, el volumen total vertido es finito, ¿cuál será el volumen total vertido en el recipiente? Verifique lo anterior gráficamente d) A partir de la función $V(t)$ obtenga la función $y(t)$ que describe el nivel o altura del agua en función del tiempo. e) Si $r = 5$ cm, $y_i = 1$ cm y la altura máxima del cilindro es $h = 10$ cm, ¿el recipiente puede llenarse sin que se rebose? Si se rebosa ¿en cuánto tiempo lo hace?

4. Tomado del Cálculo de Stewart, sexta edición.
A model for the US average price of a pound of white sugar from 1993 to 2003 is given by the function

$$S(t) = -0{,}00003237t^5 + 0{,}0009037t^4 - 0{,}008956t^3 + 0{,}03629t^2 - 0{,}04458t + 0{,}4074$$

where t is measured in years since August of 1993. Estimate the times when sugar was cheapest and most expensive during the period 1993-2003. Is there any inflection point in the same period? Plot the function and compare to your previous results. Think about the effect a correct prediction of inflection points could have in this context.

5. El PIB (producto interno bruto) de un país como función del tiempo viene dado por la función p(t). Asigne la condición matemática que corresponde a los siguientes comportamientos del PIB, en donde el tiempo inicial es t=0:

Se mantuvo constante hasta t_1, luego experimentó un decrecimiento hasta t_2 en donde inició un crecimiento constante por tiempo indefinido.	$p''(t_1) > 0$ y $p''(t_2) > 0$
El PIB creció hasta t_1 donde cambió su tendencia y bajó hasta t_2 desde donde se observó un crecimiento cada vez más rápido.	$p''(t_1) > 0$ y $p''(t_2) < 0$
Desde el inicio y hasta un tiempo entre t_1 y t_2 el PIB crecía pero ya en t_2 este fue decreciente manteniendo esa tendencia para tiempos posteriores.	$p''(t_)) = 0$ para $t \leq t_1$ y $t \geq t_2$.
El PIB inició con una tendencia decreciente que se mantuvo hasta t_1 donde inició un lapso creciente. En t_2 el PIB también experimentó un cambio de comportamiento, donde se apreció un mínimo local.	$p''(t_1) < 0$ y $p''(t_2) < 0$
A diferencia de la situación anterior, en t_2 se observó un máximo local del PIB.	$p''(t_1) < 0$ y $p''(t_2) > 0$