Differential equations

Introduction and ordinary differential equations

M.Sc. I.M. Manuel F. Mejía De Alba

Maestría en Modelado y Simulación
Universidad Central y Universidad Jorge Tadeo Lozano

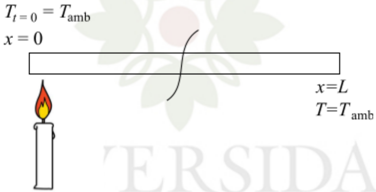
Marzo de 2014

Content

- Introduction and Definitions
- Ordinary differential equations
- Homework

Introduction problem

Problem: Describe the evolution of the temperature distribution of a body (1D rod) being heated in one of its tips



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{C_\rho}\nabla^2 T$$

Principle: *Energy conservation*

Consequence: The total variation of the energetic contents within each region in the rod $[x, x + \Delta x]$ equals the net heat flux through the region

Notation

Partial derivatives –and their presence in partial differential equations– are noted in several ways according to the author (and the context in each specific field). For example, these three expressions denote the same:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \\ \partial_t f &= \kappa \partial_{xx} f \\ f_t &= \kappa f_{xx} \end{aligned}$$

where simplicity and clarity (and often space) are the criteria to choose a particular notation

Definition

A partial differential equation (PDE) is an equation establishing a relationship between a function of two or more independent variables and the partial derivatives of this function with respect to these independent variables – i.e., given the multivariate function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$, the expression

$$F(f, f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f x_n, f_{x_1 x_1}, f_{x_1 x_2}, \ldots, f_{x_1 x_2 \cdots x_n}, \ldots, f_{x_n \cdots x_{n.}}, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

is a PDE where its *order* corresponds to the maximum number of derivatives in the equation

Ordinary differential equations

The comun case is when the independent varible is the time.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t)\,, \qquad t > 0\,,$$
$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0\,,$$

The differents methods to solve this problem are recursive methods. They made the approximation start with a initial condition U_0 and with evaluations of the right term of the equation estimate the next values of the function.

Euler:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{f}^n$$

Fourth order Runge Kutta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{u}^n, t_n\right)\,, \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{u}^n + \tfrac{1}{2}\Delta t\,\mathbf{k}_1, t_n + \tfrac{1}{2}\Delta t\right)\,, \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{u}^n + \tfrac{1}{2}\Delta t\,\mathbf{k}_2, t_n + \tfrac{1}{2}\Delta t\right)\,, \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{u}^n + \Delta t\,\mathbf{k}_3, t_n + \Delta t\right)\,, \\
\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \tfrac{1}{6}\Delta t[\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4]\,.
\end{aligned}$$

Problemas numéricos

En forma general se tiene

$$[\dot{x}] = [f([x], t)]$$

$$[x(0)] = [x_0],\ t > 0$$

Este sistema puede ser resuelto usando:

- Euler
- Diferencias finitas
- Adams–Bashforth
- Adams–Moulton
- Runge–Kutta

Implementaciones en Matlab

Función	**Tipo de problema que resuelve**	**Método**	**Ventajas/ desventajas**
`ode45`	EDOs no rígidas.	Runge-Kutta Método de un paso.	Responde bien en la mayoría de los problemas.
`ode23`	EDOs no rígidas. Se puede aplicar a ecuaciones levemente rígidas.	Runge-Kutta Método de un paso.	Más eficiente que `ode45`. Para tolerancias primitivas.
`ode113`	EDOs no rígidas.	A-B-M Método multipasos.	Más eficiente que `ode45`, cuando la EDO es muy difícil de evaluar.
`ode15s`	EDOs rígidas.	FDNs Método multipasos.	Responde bien en la mayoría de los problemas.
`ode23s`	EDOs rígidas.	Rosenbrock Método de un paso.	Más eficiente que `ode15s`. Para tolerancias primitivas.
`ode23t`	EDOs moderadamente rígidas.	FDNs Regla del trapecio.	Sin amortiguamiento numérico.
`ode23tb`	EDOs rígidas.	Runge-Kutta Regla del trapecio.	Más eficiente que `ode23t`, cuando la ODE es muy difícil de evaluar. Para tolerancias primitivas.

Stiffness - Rigidez

Problema 1

$$\begin{bmatrix} {}^1y' \\ {}^2y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1y \\ {}^2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sin x \\ 2(\cos x - \sin x) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} {}^1y(0) \\ {}^2y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Problema 2

$$\begin{bmatrix} {}^1y' \\ {}^2y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1y \\ {}^2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sin x \\ 999(\cos x - \sin x) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} {}^1y(0) \\ {}^2y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La solución analítica en ambos casos es:

$$\begin{bmatrix} {}^1y(x) \\ {}^2y(x) \end{bmatrix} = 2\exp(-x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$$

- ¿Cómo es el comportamiento de los métodos al solucionar estos 2 problemas?
- Pequeños cambios en x y y causan grandes cambios en $\dot{y}$
- Para sistemas lineales está relacionado con $\frac{max(\lambda_i)}{min(\lambda_i)}$

Homework