Taller de Ecuaciones Diferenciales

Angélica María Ramírez
Jorge Victorino

Maestría de Modelado y Simulación
Universidad Central
Universidad Jorge Tadeo Lozado

Abstract

En este taller se pretende utilizar los diferentes conceptos de ecuaciones diferenciales y aplicarlos computacionalmente, en el modelado de sistemas físicos.

1 Práctica

1.1 Rotación del sistema de coordenadas

Un sólido o superficie están definidos por una determinada geometría en un sistema de referencia dado, en algunas aplicaciones de modelado se puede requerir de una transformación geométrica. Tal como: traslación rotación, cambio de escala o una mezcla de estas operaciones básicas. Cada una de las transformaciones básicas que se han mencionado están representadas por una matriz de transformación, las cuales se pueden multiplicar para generar una única matriz que combina los resultados de cada una en el orden en que se han multiplicado.

Para rotar el sistema de coordenadas en una dirección dada por un vector es necesario construir una matriz de rotación. Por ejemplo, supongamos que se quiere hacer una rotación del sistema de coordenadas 2D, en donde el eje x se alinea con un vector de dirección.

Dado el sistema de coordenadas 2D determinado por los vectores canónicos $\hat{\imath} = [1, 0]$, y $\hat{\jmath} = [0, 1]$ que sirven como base del sistema y el vector dirección $\vec{d} = [d_1, d_2]$. Se debe encontrar la matriz para rotar el espacio de tal forma que el vector $\hat{\imath}$ se alinea con el vector dirección $\vec{d}$.

Para esto, lo primero es que el vector dirección debe ser unitario para que sirva como base, de tal forma que cada componente se debe dividir por la norma asi: $\vec{d} = [d_1/\|d\|, d_2/\|d\|] = [u_1, u_2] = \vec{u}$ quedando como el vector unitario $\vec{u}$. Luego se debe proyectar el vector $\hat{\imath}$ en la dirección $\vec{u}$, haciendo el producto punto. $< \hat{\imath}, \vec{u} >$. De tal forma que la primera componente siempre es el resultado del producto con el vector $\vec{u}$ asi:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & - \\ u_2 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Aquí el vector $x' = [x'_1, x'_2]$ representa la transformación del vector $x = [x_1, x_2]$ producida por la matriz de rotación.

Para el componente en la dirección $\hat{\jmath}$, que es perpendicular a $\hat{\imath}$, se debe encontrar un vector de dirección que sea perpendicular a $\vec{u}$. Así que se obtiene el vector perpendicular intercambiando sus componentes y multiplicando por -1 a la primera: $u(\perp) = [-u_2, u_1]$. Para finalmente determinar la matriz de rotación:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para mostrar su funcionamiento se puede rotar la figura 2D con el polígono que se ha trabajado en clase. *Nota*: revisar el resultado de probar cada linea del siguiente código:

$x = [2, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 5, 5, 4, 5, 6, 6, 5, 5, 2];$

$y = [1, 4, 4, 7, 7, 8, 9, 11, 11, 9, 8, 7, 7, 4, 4, 1, 1];$

$x = x - 3.5;$ % centrar en x

$y = y - 5.5;$ % centrar en y

plot(x, y) % pintar poligono

```
axis([-7,7,-9,9]);
grid
d = [3, 5];     % vector ejemplo
u = d/norm(d);     % norm(d) es la magnitud
m = [u(1) -u(2); u(2) u(1)];     % matriz de rotación
p = [x; y];     % vector de puntos
p1 = m*p;     % Aplica rotación
hold on
plot(p1(1,:), p1(2,:),'r')     % pinta puntos transformados
quiver(0, 0, 6, 0, 'b');     % eje x original (azul)
quiver(0, 0, 0, 9, 'b');     % eje y original (azul)
quiver(0, 0, 4.5, 6, 'r');     % eje x rotado (rojo)
quiver(0, 0, -6, 4.5, 'r');     % eje y rotado (rojo)
```

El resultado de este programa debería ser algo como se muestra en la figura 2:

La matriz de rotación dada por un ángulo θ ya se ha trabajado en una práctica anterior.

1.2 Ejercicio

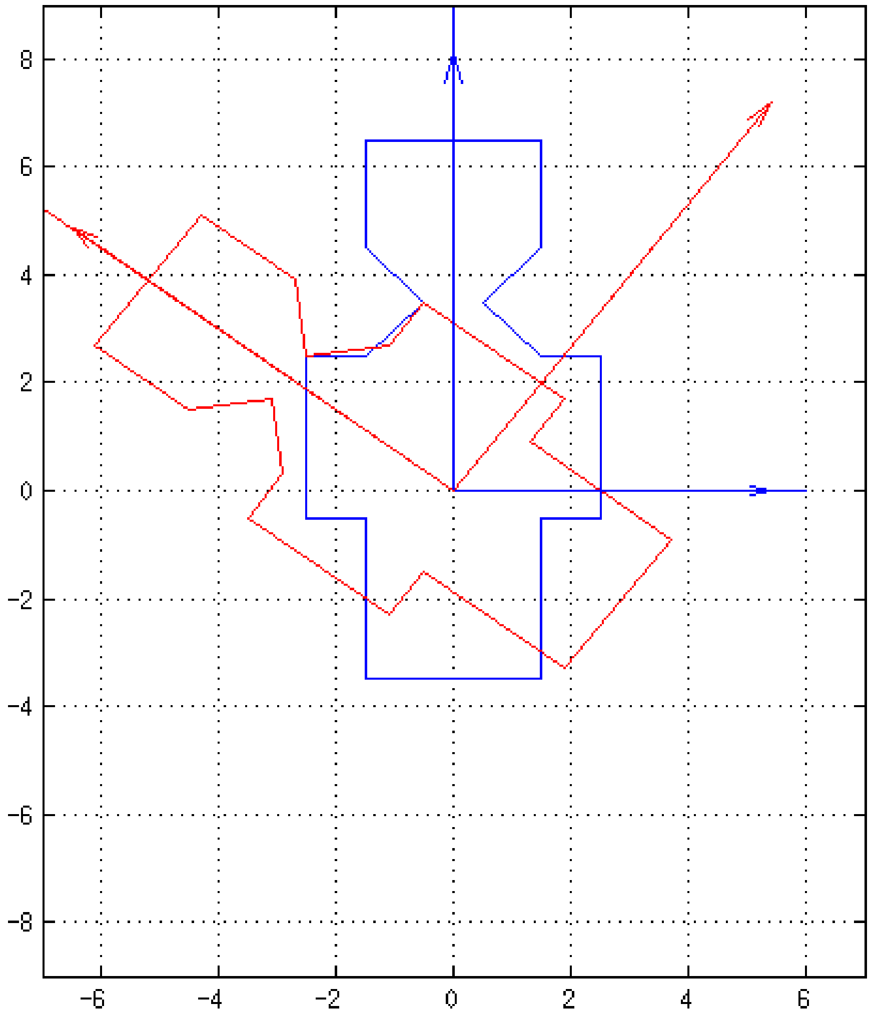
Extender el procedimiento de rotación que se hizo en 2D para la rotación del sistema de coordenadas a un eje arbitrario dado por un vector 3D. La práctica consiste en hacer un programa que rote un objeto 3D (malla) usando como eje cualquier vector 3D de dirección que se recibe como parámetro. Una forma de hacerlo es rotar el sistema de coordenadas para alinear el eje z con el vector de rotación dado (similar a como se alineo el eje x con el vector dirección en 2D).

El siguiente ejemplo usa el eje z para hacer la rotación cada 5 grados de una malla 3D, la idea, es poder alinear el eje z con el vector de dirección que se da. Una vez transformado el sitema de coordenadas tal como se describió, se procede igual que en el programa de ejemplo.

Antes de probar el programa de ejemplo se debe seguir las siguientes instrucciones:

- Descargar un archivo de programa Matlab para leer archivos tipo stl (son mallas en formato stl). Para esto primero entre a la página: `http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22409-stl-file-reader`
- Oprima sobre el botón azul Download Submission, para descargar.
- Descomprimir en una carpeta de su preferencia.
- Ubique los archivos readstl.m, femur.stl y copielos en una carpeta que se vea desde Matlab (comando **pwd** para ver la carpeta actual de Matlab)

Figure 1: Rotación alineando el eje x con un vector dirección



- Descargue el archivo deerHead.stl que está en el siguiente link: `https://sites.google.com/site/algoritmosyprogramacionuc/archivos/deerHead.stl?attredirects=0&d=1` y ubiquelo con los otros archivos.
- Ya esta liso para probar el ejemplo.

Ejemplo de rotación de una malla 3D

fv = stlread('deerHead.stl');

```
patch(fv, 'FaceColor', 'none', 'EdgeColor', [0.6 0.2 0.1]);
grid
pause
a = 5;
R = [cosd(a) -sind(a) 0; sind(a) cosd(a) 0; 0 0 1];
for i=1:72
    clf
    fv.vertices = (R*fv.vertices')';
    quiver3(0,0,0,0,0,4);
    patch(fv, 'FaceColor', 'none', 'EdgeColor', [0.6 0.2 0.1]);
    grid
    axis([-4 4 -4 4 0 4]);
    pause(0.1)
end
```

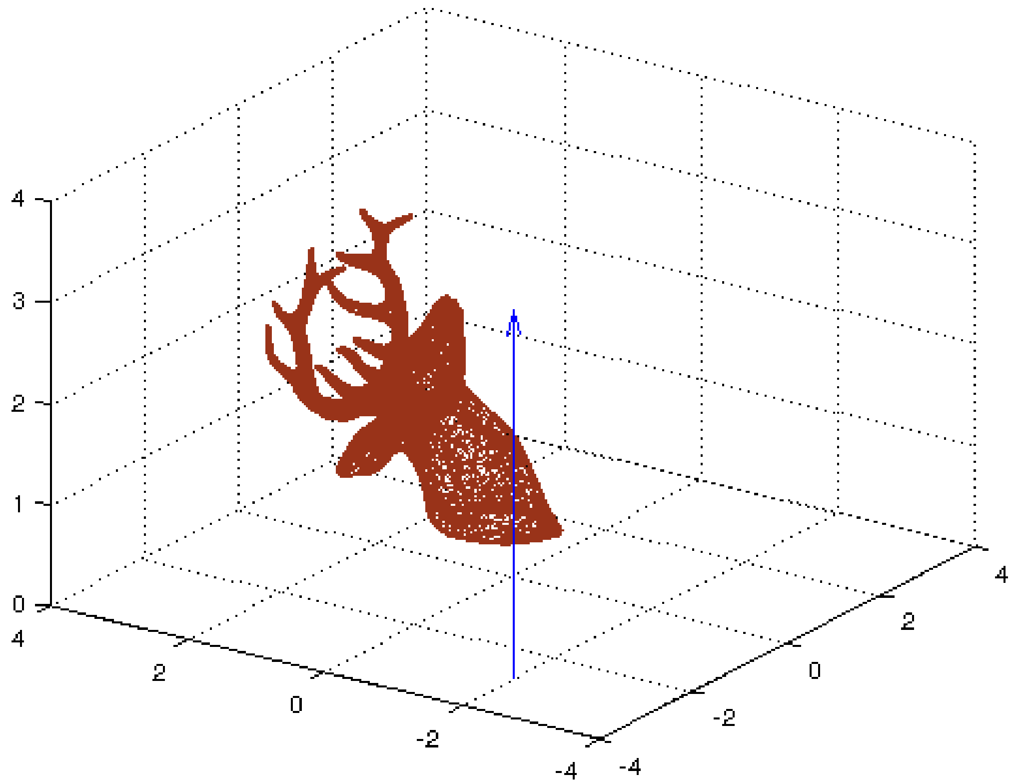
Aquí la matriz de rotación R usa como eje de giro el eje z del sistema de coordenadas. La función Patch pinta la malla 3D. En la primera linea, después de leer el archivo, se crea una estructura llamada ***fv*** esta tiene dos campos: uno es *faces* (triángulos de la malla) y la otra es *vértices* (los puntos que forman los triángulos). Lo que se debe transformar es la posición (x,y,z) de los vértices, es decir fv.vertices, la cual es una matriz de puntos.

Lo que se debe entregar en este punto de la práctica es un programa que rota la malla 3D al rededor de un eje arbitrario. Este eje es dado al programa como un vector de entrada 3D $d = (d_1, d_2, d_3)$**.** Usar los conceptos de vectores para hacer la tranformación que se requiere.

Material de apoyo

- `http:\\www.josechu.com\mates\giros_espacio_es.htm`

Figure 2: Rotación usando el eje z (en azul). Malla 3D en rojo

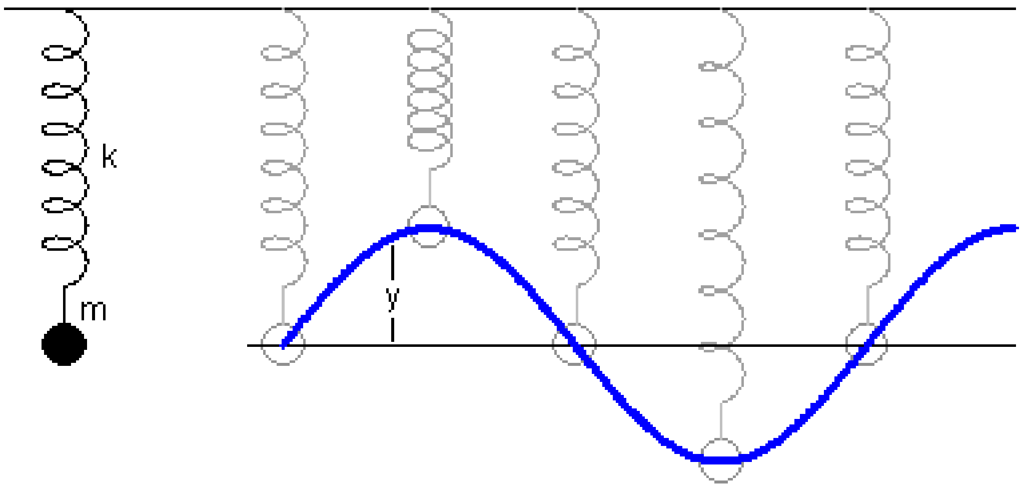


2 Oscilador armónico simple.

Los sistemas de oscilador armónico simple, son de gran interéspor su capacidad de representar movimientos de la naturaleza en casos como los sismos o movimientos telúricos los modos de vibración causados sobre una viga de hormigón, las vibraciones en máquinas, entre otros.

La representación física del movimiento armónico simple, está dado por un sistema masa-resorte, como el que se muestra en la figura.

Figure 3: Oscilador armónico simple.Fuente: http://es.wikipedia.org



Para este sistema, con condiciones incicales y(0)=0,5 y y'(0)=0.

1. Plantear la ecuación diferencial que representa la posición y de la masa, dependiente del tiempo. Los parámetros serán la masa m y la constante del resorte k.

2. Hallar la ecuación solución analítica con la ecuación característica.

3. Desarrollar un programa basado en lo desarrollado en clases anteriores, para ver la solución del sistema.

4. Correr el programa para los casos en que a K y m se le asignen los valores de la tabla 1.

5. Resolver el sistema de ecuaciones a través de ODE45

6. Comparar los resultados analíticos y los numéricos (ODE 45)

Halle los valores propios y vectores propios de la matriz de coeficientes definidas en el sistema de ecuaciones. Para ello conteste:

1. ¿Con cuál de los parámetros y/o variables estan relacionados los eigenvalores?

K (N/m)	m (Kg)
30	900
500	900
1500	900

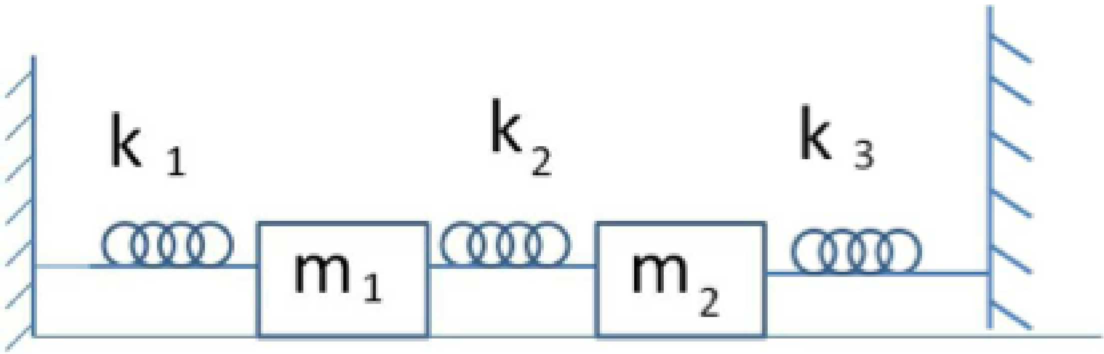
Table 1: Valores de K y m para el problema 1

2. ¿Con cuál de los parámetros y/o variables estan relacionados los eigenvectores?
3. ¿Cómo afecta a los eigenvalores y eigenvectores los cambios en K y m?
4. ¿Qué relación observa entre los valores propios de la matriz de coeficientes y los valores de las raices encontrados con la ecuación característica.
5. ¿Qué relación hay entre los resultados anteriores y al velocidad angular del sistema?

3 Sistema de masa-resorte en serie

El sistema masa-resorte que se muestra en la figura, representa un problemaa típico de segundo orden que se puede convertir en un sistema de 4 ecuaciones diferenciales de primer orden. El número de ecuaciones depende del número de masas en estudio.

Figure 4: Conjunto de masas resorte en serie



Para el planteamiento de las ecuaciones de este estilo se recomienda seguir este procedimiento:

- Establecer una dirección de referencia para cada masa
- Establecer la relación mayor o menor que entre los desplazamiento. p.e. $y1 > y2 > y3$
- Con el concepto anterior, pensar si el resorte se comprime o se alarga y de esta manera establecer el efecto que causa sobre la masa: si lo empuja o lo hala.

K (N/m)	m (Kg)
4	2
2	1
1	

Table 2: Valores de K y m.

- Plantear el DCL de casa masa
- Plantear las ecuaciones dinámicas de acuerdo a la segunda ley de Newton
- Tener cuidado al en las relaciones de comparación entre los desplazamientos.

Para este caso, considerar como condiciones iniciales

$$x_1(0) = 3; x_1'(0) = 0; x_2(0) = -2; x_2'(0) = 0$$

1. Plantear la ecuación diferencial que representa la posición y de la masa, dependiente del tiempo. Los parámetros serán la masa m y la constante del resorte k.
2. Reducir el orden de la ecuación y encontrar los eigenvalores y los eigenvectores.
3. Observar el programa de matlab anexo y correrlo para los casos en que K y m tengan los valores de la tabla 2:
4. Resolver el sistema de ecuaciones a través de ODE45
5. Comparar los resultados analíticos y los numéricos (ODE 45)

4 Sistema de amortiguación de un coche

Una de las aplicaciones estrella de los sistemas masa-resorte amortiguador es el sistema de suspensión de un automóvil. Estos sistemas tienen como función absorber las rugosidades del terreno tanto para el confort de los pasajeros como para evitar los daños por fatiga de los diferentes componentes del automotor.

Para este efecto, se ha solicitado se desarrolle un modelo de la suspensión. Se considera que 1/4 de la masa del vehículodel m_1 está sobre la suspensión que cuenta con un resorte de constante K_1 y un amortiguador b_1. De otro lado, la llanta con una masa m_2, está constituida por un material que se representa por un resorte de constante K_2.

Considere que: $m_1 = 250[K]$ $K_1 = 200[N/m]$ $b_1 = 650[NS/m]$ $m_2 = 20[k]$ $k_2 = 1600[N/m]$

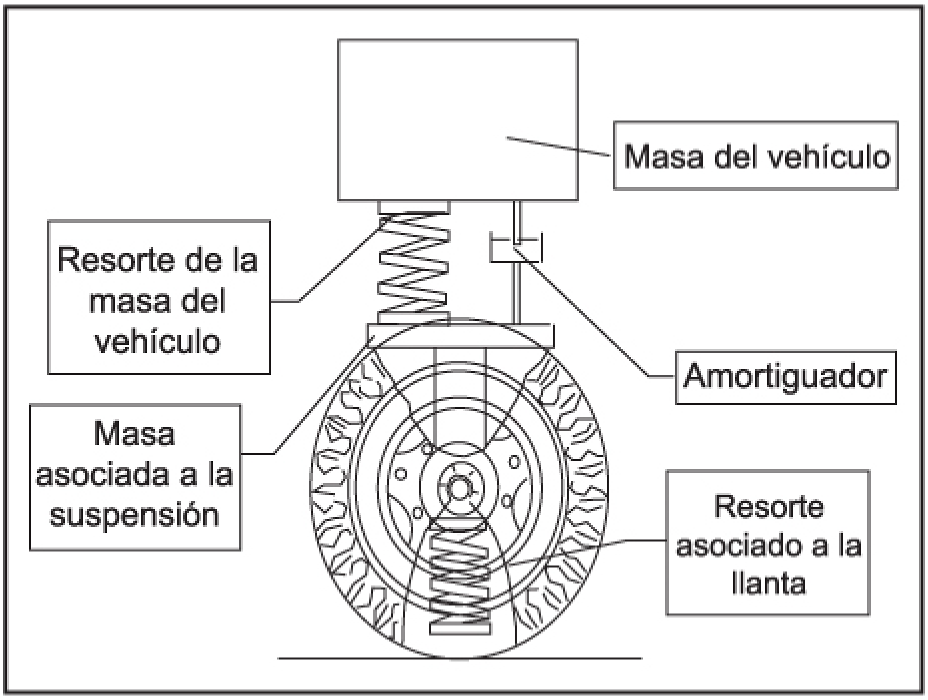
Además resuelva considerando condiciones iniciales: $y(0) = 0.2[m]$ $y'(0) = 0$

Ahora considere un cambio en la velocidad $y(0) = 0$ $y'(0) = 10[km/h]$

Por último, considere el paso de un sobresalto, así que la referencia se está moviendo $y_a = 0.3 - 0.5t^2$

1. Plantear la ecuación diferencial que representa la posición y de la masa, dependiente del tiempo. Los parámetros serán la masa m y la constante del resorte k.

Figure 5: Sistema de amortiguación de un carro



2. Reducir el orden de la ecuación y encontrar los eigenvalores y los eigenvectores.

3. Resolver el sistema de ecuaciones a través de ODE45

4. Variar los valores de la constante del resorte y el b de modo que el sistema presente un comportamiento subamortigado con máximo 3 oscilaciones.

5 Condiciones de entrega

- se debe entregar un documento escrito en formato IEEE, donde se evidencia la metodología utilizada, los resultados, análisis y conclusiones. Adicionalmente se debe agregar los códigos .m desarrollados para el taller.

- El trabajo se puede hacer en grupo de máximo tres personas.

- La entrega debe hacer a través del moodle, el día domingo 12 de octubre antes de las 11.55 p.m.